Zur Theorie der mehrwerthigen Functionen von n Elementen.

Inaugural-Dissertation

welche

mit Genehmigung

der

philosophischen Facultät der Universität Breslau

zur Erlangung der Doctorwürde

Montag, den 6. August 1877, Vormittags 11 Uhr

in der Aula Leopoldina

öffentlich vertheidigen wird

Alfred Bochert

gegen die Herren

Otto Handel, Dd. phil. und **Otto Gutsche**, cand. math.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

BRESLAU.
F. W. Jungfer's Buchdruckerei.
1877.

Herrn

PROFESSOR DR. ROSANES

in Hochachtung und Dankbarkeit

gewidmet

vom Verfasser.

Den ersten Anlass zu Untersuchungen über die Anzahl der Werthe, welche eine Funktion von n Elementen bei Vertauschung derselben annehmen kann, gab, wie man weiss, die Frage nach der Auflösung der algebraischen Gleichungen höheren als des vierten Grades. Hinsichtlich der älteren Arbeiten von *Lagrange, Ruffini, d'Abatti, Cauchy, Abel* darf ich wohl auf die einleitenden Bemerkungen der Abhandlung verweisen, welche J. A. Serret 1849 der Pariser Akademie überreichte unter dem Titel: «Mémoire sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction, quand on y permute les lettres qu'elle renferme.»[1])

Bertrand war bekanntlich der Erste, welcher den wichtigen Satz bewies, «dass eine mehr als zweiwerthige Funktion von n Elementen mindestens n Werthe haben müsse», allerdings nur mit Hülfe einer damals noch unbewiesenen zahlentheoretischen Voraussetzung; er zeigte zugleich, dass eine Funktion von n Elementen, die genau n Werthe habe, symmetrisch in n—1 Elementen sein müsse», wobei er jedoch, wie auch im vorigen Satze, $n > 7$ annahm. Seine Untersuchungen[2]), die er 1845 der Akademie vorlegte, führen noch zu dem weiteren Schlusse, «dass eine mehr als n werthige Funktion von n Elementen nicht weniger als 2n Werthe haben könne, wenn $n > 9$ sei».

Cauchy hatte das Bestehen des Bertrand'schen Satzes schon früher vermuthet, ihn aber nur für $n = 6$ und diejenigen Fälle nachweisen können, in denen n eine Primzahl ist; er gab[3]) nunmehr einen allgemeinen und strengen Beweis, indem er von neuen Betrachtungen ausging, welche sich auf die Transitivität der Funktionen beziehen.

Die nächste bedeutende Arbeit über die kleinsten Werthezahlen einer Funktion von n Elementen ist die erwähnte Abhandlung von *Serret*, worin derselbe zu folgenden Sätzen gelangt:

---

[1]) Liouville, Journ. de math., série I, tome XV und Serret, Handbuch d. höheren Algebra, Bd. II, Thl. IV, Kap. III.

[2]) Journ. de l'Ec. polyt., cahier XXX und Serret, l. c.

[3]) Compt. rend., tome XXI, 1845 und Serret, l. c.

«Eine Funktion von n Elementen, welche weniger als n Werthe besitzt, hat höchstens zwei, wenn $n > 4$ ist».

«Eine Funktion von n Elementen, welche genau n Werthe hat, ist symmetrisch in n—1 Elementen, wenn nicht n=6 ist».

«Eine Funktion von n Elementen, welche mehr als n Werthe besitzt, hat mindestens 2n, wenn $n > 8$ ist; und hat sie genau 2n, so ist sie alternirend in n—1 Elementen».

«Eine Funktion von n Elementen, die mehr als 2nwerthig ist, hat mindestens $\frac{n(n-1)}{2}$ Werthe, wenn $n > 12$ ist».

Zur Ableitung dieser Sätze benützte Serret das Verfahren des Schlusses von n—2 auf n, und der indirekten Art dieses Verfahrens ist es zuzuschreiben, dass für n im dritten und vierten Satze die unteren Grenzen 9 und 13 verlangt werden, während der vierte Satz in der ausgesprochenen Form allgemein gilt, und im dritten die untere Grenze 7 genügt.

Die richtigen Grenzen für n fand erst *Emile Matthieu*[4]), der noch folgenden Satz hinzufügte:

«Eine Funktion von n Elementen, welche mehr als $\frac{n(n-1)}{2}$ Werthe besitzt, hat mindestens $n(n-1)$, wenn $n > 8$ ist».

Seine Untersuchungen sind im Wesentlichen rein substitutionstheoretischer Art.

Endlich suchte *Camille Jordan*[5]) die bisherigen Ergebnisse als besondere Fälle aus dem allgemeinen Satze abzuleiten:

«Für genügend grosse n haben Funktionen von n Elementen, welche symmetrissh oder alternirend in $n-k$ derselben sind, weniger Werthe, als solche ohne diese Eigenschaft».

Dieser Satz leidet aber, abgesehen von seinen ziemlich weitgehenden substitutionstheoretischen Voraussetzungen, von vornherein an der Schwierigkeit einer scharfen Bestimmung seiner Gültigkeitsgrenzen. Wenn er also selbst eine Erweiterung der früheren Resultate gestattet, so werden doch die Grenzen von n, über denen sie gelten sollen, wieder ungenau, und damit hängt zusammen, dass auch die Ausnahmefälle unberücksichtigt bleiben, während gerade die Funktionen, welche diesen Fällen entsprechen, von besonderem Interesse sind.

In der nachfolgenden Arbeit habe ich nun die Theorie der mehrwerthigen Funktionen von n Elementen unter einem neuen Gesichtspunkte behandelt. Das gewöhnliche substitutionstheoretische Verfahren scheint mir nämlich nicht ohne erhebliche Mängel zu sein. Denn einerseits ist die Ausbildung der Sub-

[4]) Compt. rend., tome XLVI, 1858.
[5]) Jordan, Traité des Substitutions. 1870.

stitutionstheorie selbst noch eine lückenhafte: andererseits fehlt ihrer Betrachtungsweise der feste, genügend begrenzte Gegenstand, so dass ihre erfolgreiche Handhabung grosse Gewandtheit und Uebersicht erfordert. Statt also die Funktion durch die Gruppe der Substitutionen zu kennzeichnen, welche sie zulässt, habe ich ein mehr oder minder genaues schematisches Bild derselben herzustellen gesucht, indem ich die $\frac{n(n-1)}{2}$ Transpositionen ihrer n Elemente symbolisch bezeichnete und nach der Art anordnete, in der sie den gegebenen Funktionswerth ändern. Dieses Bild habe ich der Untersuchung zu Grunde gelegt, und wo es zur Kennzeichnung der Funktion nicht ausreichte, durch neue Bilder ergänzt, die ich dadurch gewann, dass ich zwei durch Transpositionen in einander übergehende Funktionswerthe zusammenfasste und dieses Paar in der nämlichen Weise behandelte, wie die ursprüngliche Funktion. Eine solche Behandlungsweise macht allerdings für jede allgemeinere Untersuchung die Unterscheidung einer Menge besonderer Fälle nöthig; indessen halte ich dies insofern für keinen Nachtheil, als die Unterscheidung keine willkürliche ist, sondern aus einer genaueren Eintheilung der Funktionen entspringt. Hinsichtlich der letzteren weiche ich in wesentlichen Punkten von der üblichen Klassifikation ab, die sich auf den transitiven Charakter bezieht. So theile ich die Funktionen nicht in die beiden Hauptklassen der transitiven und intransitiven, sondern in solche, welche Transpositionen zulassen, und in solche, die durch jede Transposition geändert werden. Die Funktionen der ersten Art zeichnen sich offenbar dadurch aus, dass sie Elemente symmetrisch enthalten.

Was die erlangten Resultate betrifft, so musste ich mich, dem Zwecke der Arbeit entsprechend, darauf beschränken, in der Aufsuchung der kleinsten Werthezahlen etwas über die bisher erreichte Grenze $n(n-1)$ hinauszugehen, nämlich bis $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$; besonderes Gewicht habe ich auf die eingehende Erörterung aller dabei auftretenden Ausnahmefälle gelegt. Das von mir eingeschlagene Verfahren zeigt das Vorhandensein solcher Fälle meist unmittelbar an und giebt ausserdem für die Mehrzahl der betrachteten Funktionen in dem schematischen Bilde ein bequemes Mittel zur Herstellung expliciter Beispiele.

Die Arbeit zerfällt in zwei Theile. Der erste enthält die allgemeinen theoretischen Grundlagen und den Beweis der ersten beiden Serret'schen Sätze. Im zweiten, umfangreicheren Theile sind die weiteren Sätze bis zur Grenze $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ herge-

leitet und die zahlreichen Ausnahmefunktionen ausführlich behandelt; hinzugefügt ist eine Untersuchung des transitiven Charakters derselben, der sich aus ihrem schematischen Bilde sehr leicht ergiebt.

Aus der Substitutionstheorie ist im Wesentlichen nur der leicht beweisbare Satz vorausgesetzt, dass die Ordnung einer Gruppe, die in einer andern enthalten ist, ein Theiler von der Ordnung der letzteren ist. Ein besonderer Fall davon ist bekanntlich der Satz, dass die Werthezahl einer Funktion von n Elementen Theiler von n! ist.

Erster Theil.

Erster Abschnitt.

§ 1. Herstellung der zugehörigen Zerlegung.
§ 2. Beziehung zwischen ihrer Werthezahl und derjenigen der Funktion.
§ 3. Beziehungen zwischen der Werthezahl der Funktion und derjenigen eines Transpositionenkomplexes.
§ 4. Form der Transpositionenkomplexe.
§ 5. Allgemeiner Ausdruck für ihre Werthezahl.
§ 6. Aufstellung von Ungleichungen für die Werthezahl der Funktion.

Zweiter Abschnitt.

§ 7. Kleinste Werthezahlen eines Transpositionenkomplexes.
§ 8. Beweis der ersten beiden Serret'schen Sätze.
§ 9. Ausnahmefälle n = 4 und n = 6.

Erster Abschnitt.

§ 1.

Es sei f eine Funktion der n Elemente a_1, a_2, .. a_n, und einer gegebenen Anordnung dieser letzteren entspreche der Werth f_0. Diejenigen Vertauschungen der n Elemente (Substitutionen), welche f_0 nicht ändern, bilden bekanntlich eine Gruppe, d. h. alle Zusammensetzungen (Produkte) derselben sind wieder unter ihnen enthalten. Die Ordnung (Zahl der Substitutionen) dieser Gruppe ist ein Theiler von der Zahl $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ aller möglichen Anordnungen der n Elemente, und zwar $= \frac{n!}{v}$, wenn v die Anzahl der verschiedenen Werthe bedeutet, welche f_0 durch Substitutionen erhalten kann.

Eine Vertauschung zweier Elemente $a_\varkappa$, a_λ (Transposition) soll symbolisch durch $(\varkappa\lambda)$ bezeichnet werden, oder auch durch $\varkappa\lambda$, wenn ein Missverständniss nicht zu befürchten ist. Das Symbol $\varkappa\lambda$ ist natürlich gleichbedeutend mit $\lambda\varkappa$.

Alle verschiedenen Werthe, welche sich dadurch ergeben, dass man in f_0 immer nur eine Transposition ausführt, seien nun f_{i_1}, f_{i_2}, . . f_{i_τ}; darunter f_0 selbst, wenn dieser Funktionswerth durch eine oder mehrere Transpositionen nicht geändert wird (dieselben zulässt). Die $\frac{n(n-1)}{2}$ Transpositionen, welche in den n Elementen a_1, a_2, . . a_n möglich sind, ordnen sich dann so in τ Komplexe, dass alle Transpositionen des nämlichen Komplexes f_0 in denselben Werth umwandeln. Das System dieser τ Komplexe soll «die dem Funktionswerthe f_0 zugehörige Zerlegung» (der $\frac{n(n-1)}{2}$ Transpositionen) genannt werden. Dieselbe wird durch den Funktionswerth offenbar eindeutig bestimmt.

Eine schematische Darstellung der zugehörigen Zerlegung erhält man, wenn man die Transpositionen durch ihre Symbole ersetzt und diese in der angegebenen Weise anordnet.

Ist z. B. die Funktion $f_0 = a_1 a_2 + a_3 a_4$ der 5 Elemente a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 gegeben, so hat man für die zugehörige Zerlegung das Schema:

12 , 34
13 , 24
14 , 23
15
25
35
45

Denn $a_1 a_2 + a_3 a_4$ lässt die Transpositionen 12 und 34 zu, geht durch 13 und 24 in $a_3 a_2 + a_1 a_4$, durch 14 und 23 in $a_4 a_2 + a_3 a_1$ über und erhält durch 15, 25, 35, 45 je einen andern Werth.

§ 2.

Das zu f_0 gehörige Zerlegungsschema möge kurz durch Z_0 bezeichnet werden. Die Zuordnung von Z_0 zum Funktions-

werthe f_0 besteht offenbar für alle beliebigen Werthe der Elemente a_1, a_2, .. a_n, erlaubt also auch jede Vertauschung derselben; d. h. zu jedem Funktionswerthe, welcher durch eine solche Vertauschung aus f_0 entspringt, ergiebt sich das zugehörige Zerlegungschema, wenn man die nämliche Substitution in den Indices der Transpositionssymbole von Z_0 vollzieht. Da somit eine Substitution, welche f_0 nicht ändert, auch Z_0 nicht ändern kann, so finden sich alle Substitutionen der Gruppe von f_0 unter denen, welche Z_0 zulässt. Die Zahl dieser letzteren ist grösser oder geringer, je nachdem man die Anordnung der Komplexe in Z_0 als ebenso gleichgültig betrachtet, wie es die Reihenfolge der Transpositionen innerhalb jedes Komplexes ist, oder nicht. Im Allgemeinen werden sich nämlich die Komplexe von gleicher Form so in Gruppen theilen, dass die derselben Gruppe angehörigen durch alle von f_0 zugelassenen Substitutionen nur untereinander vertauscht werden. So bleibt insbesondere der Komplex der zugelassenen Transpositionen bei jeder solchen Substitution für sich ungeändert. Nimmt man auf Unterschiede dieser Art Rücksicht, so wird man natürlich das Schema Z_0 nur dann als ungeändert ansehen können, wenn sich die Aenderung auf Vertauschungen von Transpositionen desselben Komplexes und von Komplexen derselben Gruppe untereinander beschränkt. Jedenfalls aber ist die Zahl z aller verschiedenen Schemata, welche aus Z_0 durch Substitution entspringen, oder kürzer «aller verschiedenen Werthe von Z_0 », ein Theiler von der Zahl v der Funktionswerthe. Denn sind f_0, f_1, .. $f_{\varkappa-1}$ sämmtliche Funktionswerthe, welche das gleiche Zerlegungsschema Z_0 besitzen, so lässt Z_0 offenbar die und nur diejenigen Substitutionen zu, welche höchstens die Reihenfolge jener $\varkappa$ Werthe ändern. Diese Substitutionen bilden aber, wie man leicht erkennt, eine Gruppe, also auch die mit ihnen identischen, welche Z_0 nicht ändern. Da nun die letzteren die Gruppe von f_0 enthalten, so ist die Ordnung $\frac{n!}{v}$ dieser Gruppe ein Theiler von der Ordnung $\frac{n!}{z}$ der Gruppe von Z_0. Aus $\frac{n!}{z} = \varkappa\frac{n!}{v}$ folgt aber die Behauptung $v = \varkappa z$.

§ 3.

Fasst man jetzt einen der τ Komplexe von Z_0 ins Auge und bezeichnet kurz durch $f_0 (T_i) f_i$, dass f_0 durch alle Transpositionen des Komplexes T_i, und nur durch diese, in f_i verwandelt wird, so ordnet $f_0 (T_i) f_i$ dem Paare f_0, f_i eindeutig den Komplex T_i zu, und zwar ist diese Zuordnung symmetrisch in f_0 und f_i, d. h. unabhängig von der Reihenfolge der beiden Funktionswerthe. Denn jede Transposition, welche f_0 in f_i umwandelt, führt, zweimal angewandt, f_0 durch f_i in f_0 zurück, verwandelt also auch f_i in f_0, so dass $f_0 (T_i) f_i$ gleichbedeudend ist mit $f_i (T_i) f_0$; die Zuordnung $f_i (T_i) f_0$ gilt, welche Werthe die Elemente $a_1 \ldots a_n$ auch haben mögen, also auch, wenn man dieselben beliebig vertauscht, indem man sowohl in f_0 und f_i als in den Transpositionen des Komplexes T_i die nämliche Substitution ausführt. Wendet man nun auf $f_0 (T_i) f_i$ alle möglichen Substitionen an, so ist die Gesammtheit aller, in einem oder beiden Gliedern verschiedenen Paare von Funktionswerthen, die man dabei erhält, als solche für jede Substitution unveränderlich. Denn einerseits treten in der Reihe $P'_0, P'_1, \ldots$, die durch Substitution aus der Reihe aller verschiedenen Paare $P_0, P_1 \ldots$ entspringt, keine neuen Glieder auf; andererseits können zwei verschiedene Paare P_0, P_1 durch die nämliche Substitution nicht in dasselbe Paar P' verwandelt werden, da sonst P' durch die umgekehrte Substitution gleichzeitig in die beiden verschiedenen Paare P_0, P_1 übergehen müsste, was offenbar unmöglich ist. Die Reihe $P'_0, P'_1, \ldots$ enthält somit keine andern und ebensoviele verschiedenen Glieder als die Reihe $P_0, P_1 \ldots$, ist also bis auf die gleichgültige Anordnung mit letzterer identisch.

Einen Funktionswerth f in $P_0, P_1, \ldots$ kann man nun durch geeignete Substitution in jeden beliebigen andern f' umwandeln; geht also durch diese Substitution $P_0, P_1 \ldots$ in $P'_0, P'_1 \ldots$ über, so kommt f' in $P'_0, P'_1 \ldots$ ebenso oft vor, wie f in $P_0, P_1 \ldots$, da die nämliche Substistution einen andern Werth als f nicht ebenfalls in f' verwandeln kann. $P'_0, P'_1, \ldots$ ist aber bis auf die Reihenfolge identisch mit

P_0, P_1 . . , und folglich enthält die Gesammtheit aller verschiedenen Paare jeden Funktionswerth gleich oft.

Ebenso wie die Gesammtheit aller verschiedenen Paare ist aber auch die Gesammtheit der zugehörigen Komplexe T als solche für jede Substitution unveränderlich, da jedes Paar eindeutig seinen Komplex bestimmt. Alle diese Komplexe sind nun durch Substitution aus einem unter ihnen, T_i, hervorgegangen, und also, ähnlich den Werthen einer Funktion, als «Werthe desselben Komplexes T» zu betrachten. Soll daher die Gesammtheit aller zugeordneten Komplexe T durch keine Substitution geändert werden, so müssen alle verschiedenen Werthe, welche T durch Substitution erhalten kann, gleichoft in ihr auftreten.

Damit ist eine Beziehung zwischen der Werthezahl v von f und derjenigen von T gegeben. Ist die letztere nämlich $= t$, und kommt jeder Werth von T q mal in der Gesammtheit der zugehörigen Komplexe vor, so ist die Zahl derselben einerseits $= qt$. Diese Zahl ist aber andererseits einerlei mit der Zahl p der verschiedenen Paare von Funktionswerthen, welche durch Substitution aus f_0 (T_i) f_i entspringen, und in der Gesammtheit dieser Paare, welche 2 p Funktionswerthe enthält, tritt jeder der v verschiedenen Werthe von f gleichoft, etwa k mal, auf, so dass $2p = kv$ ist. Man hat folglich $2p = kv = 2qt$.

Sind in dem ursprünglichen Paare f_0 (T_i) f_i beide Funktionswerthe gleich, also $f_0 = f_i$, so ist dies auch in jedem durch Substitution daraus hervorgehenden Paare der Fall. Paare, die ein Glied gemein hätten, würden dann überhaupt gleich sein, und es tritt somit jeder Funktionswerth nur in einem Paare auf, dort aber zweimal. k ist folglich in diesem Falle $= 2$, wodurch die Beziehung $2\,qt = kv$ die einfachere Gestalt erhält: $v = qt$. In der That wird ja auch der Komplex T derjenigen Transpositionen, welche ein Funktionswerth zulässt, durch diesen allein eindeutig bestimmt, so dass der unveränderlichen Gesammtheit der v Funktionswerthe v Komplexwerthe zugehören, die in ihrer Gesammtheit ebenfalls für jede Substitution unveränderlich sind. Alle t verschiedenen Werthe des Komplexes treten folglich unser diesen v gleichoft auf, d. h. v ist Vielfaches von t.

Sind dagegen in f_0 (T_i) f_i, und also auch in allen durch Substitution daraus entspringenden Paaren, die beiden Funktionswerthe verschieden, so giebt qt nicht mehr die Werthezahl

von f an, sondern die Zahl aller aus f_0 , f_i hervorgehenden verschiedenen Paare. k ist dann offenbar die Zahl derjenigen unter diesen Paaren, welche sämmtlich einen Funktionswerth f gemein haben. Solcher Paare kann es höchstens v—1 geben, da sich einem von v Werthen höchstens v—1 verschiedene andere zuordnen lassen, und k ist folglich $\leqq$ v—1, also $v(v-1) \geqq 2$ qt. Es ist ferner sofort ersichtlich, dass die zugehörigen Komplexwerthe aller k Paare, welche aus f_0 (T_i) f_i durch Substitution entspringend einen und denselben Funktionswerth f gemein haben, Komplexe der zu f gehörigen Zerlegung sind. Die Zahl der in diesen k Komplexwerthen enthaltenen Transpositionen ist somit höchstens der Gesammtzahl $\frac{n(n-1)}{2}$ aller Transpositionen gleich. Ist also T die Transpositionenzahl des Komplexes T, so hat man $kT \leqq \frac{n(n-1)}{2}$, d. h. $k \leqq \frac{n(n-1)}{2T}$. Uebrigens wird später die Zahl k noch näher bestimmt werden.

§ 4.

Nachdem auf diese Weise Beziehungen gefunden sind zwischen der Werthezahl v einer Funktion und derjenigen t eines Komplexes aller Transpositionen, welche einen Funktionswerth ungeändert lassen, oder ihn sämmtlich in den nämlichen andern Werth umwandeln, handelt es sich weiter darum, die Zahl t zu bestimmen.

Dazu führt sehr leicht eine bemerkenswerthe Eigenschaft jedes Transpositionenkomplexes, wie ein Komplex der erwähnten Art von nun ab genannt werden soll. Derselbe wird nämlich durch keine seiner eigenen Transpositionen geändert. Denn eine Transposition von T_i vertauscht in f_0 (T_i) f_i f_0 mit f_i, lässt also das Paar f_0 , f_i als solches ungeändert, und damit auch den Komplex T_i, der ja durch dieses Paar, unabhängig von der Reihenfolge seiner beiden Glieder, eindeutig bestimmt ist. Insbesondere wird auch der Komplex aller Transpositionen, welche ein Funktionswerth zulässt, durch keine seiner Transpositionen geändert, da dieselben den Funktionswerth selbst nicht ändern.

Es seien nun (12) (13) . . . (1 r) alle Transpositionen eines Komplexes, welche ein Element (a_1) gemein haben. Unter-

wirft man diese Reihe ihren eigenen Transpositionen, so erhält man nacheinander: (21) (23) . . (2r)
(32) (31) . . (3r)
. . . . . .
(r2) (r3) . . (r1)

Dieses Schema umfasst aber alle $\frac{r(r-1)}{2}$ Transpositionen der r Elemente a_1, a_2 . . a_r. Alle diese Transpositionen müssen folglich auch in dem Komplexe auftreten, wenn derselbe durch (12) (13) . . (1r) nicht geändert werden soll. Andere Transpositionen, welche eines der Elemente a_1 . . a_r enthielten, sind dagegen im Komplexe nicht vorhanden. Denn wäre $(\lambda, r+1)$ eine solche Transposition, welche ein Element a_λ der Reihe $a_1 \ldots a_r$ mit einem neuen a_{r+1} versetzte, so würde der Komplex die $(r+1)$ Transpositionen $(\lambda 1)$ $(\lambda 2)$ . . (λr) $(\lambda, r+1)$ besitzen, welche sämmtlich das Element a_λ gemein hätten. Er müsste folglich überhaupt alle Transpositionen der $r+1$ Elemente a_1 . . a_r, a_{r+1} enthalten, also auch die Transposition $(1, r+1)$, im Widerspruche mit der Voraussetzung, dass (12), (13) . . . (1r) sämmtliche im Komplexe vorhandenen Transpositionen des gemeinsamen Elementes a_1 sind. Die Transpositionen des Komplexes bilden demnach Gruppen, deren jede aus allen Transpositionen einer gewissen Zahl von Elementen besteht, und von denen keine zwei ein Element gemein haben. Solche Gruppen sollen kurz Transpositionsgruppen heissen. Jede derselben ist symmetrisch in ihren Elementen.

§ 5.

Der Komplex möge nun ρ_1 Transpositionsgruppen von je r_1 Elementen, ρ_2 von je r_2, . . . , ρ_σ von je r_σ Elementen enthalten, und m der n Elementen seien nicht in ihm vorhanden, so dass $\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n-m$ ist. Die Werthezahl des Komplexes ist dann offenbar einerlei mit der Zahl der verschiedenen Arten, auf welche sich aus n Elementen ρ_1 Gruppen von je r_1, ρ_2, von je r_2, . . ., ρ_σ von je r_σ Elementen herstellen lassen, wenn keine zwei dieser Gruppen Elemente gemein haben sollen, und sowohl die Anordnung der Elemente innerhalb jeder Gruppe, als auch die Reihenfolge der Gruppen selbst, als gleichgültig betrachtet wird.

Nun liefern n Elemente zunächst $\frac{n(n-1)\ldots(n-r_1+1)}{r_1!}$ verschiedene Kombinationen zu r_1 Elementen; nimmt man eine derselben heraus, so kann man aus den übrigen $n-r_1$ Elementen eine zweite Gruppe von r_1 auf $\frac{(n-r_1)\ldots(n-2r_1+1)}{r_1!}$ verschiedene Arten bilden; die $n-2r_1$ Elemente, welche nach Abzug einer solchen zweiten Gruppe bleiben, geben auf $\frac{(n-2r_1)\ldots(n-3r_1+1)}{r_1!}$-fache Weise eine dritte, u. s. w. So fortfahrend würde man

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r_1+1)}{r_1!}\cdot\frac{(n-r_1)\ldots(n-2r_1+1)}{r_1!}\ldots\frac{(n-\rho_1 r_1+r_1)\ldots(n-\rho_1 r_1+1)}{r_1!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-\rho_1 r_1+1)}{(r_1!)^{\rho_1}}$$

verschiedene Anordnungen von je $\rho_1 r_1$ Elementen in ρ_1 Gruppen von r_1 Elementen erhalten, wenn nicht hierbei alle diejenigen Anordnungen als verschieden gezählt wären, welche sich nur in der gleichgültigen Reihenfolge der ρ_1 Gruppen von einander unterscheiden und daher als gleich zu betrachten sind. Die ρ_1 Gruppen können aber auf $\rho_1!$ Arten miteinander vertauscht werden; je $\rho_1!$ Anordnungen von den erhaltenen $\frac{n(n-1)\ldots(n-\rho_1 r_1+1)}{(r_1!^{\rho_1}}$ sind folglich gleich, und es bleiben nur $\frac{n(n-1)\ldots(n-\rho_1 r_1+1)}{\rho_1!\,(r_1!)^{\rho_1}}$ verschiedene. Wählt man eine derselben, so kann man weiter aus den übrigen $n-\rho_1 r_1$ Elementen eine Anordnung von $\rho_2 r_2$ in ρ_2 Gruppen von r_2 Elementen auf $\frac{(n-\rho_1 r_1)\ldots(n-\rho_1 r_1-\rho_2 r_2+1)}{\rho_2!\,(r_2!)^{\rho_2}}$ verschiedene

Arten herstellen; die $n-\rho_1 r_1-\rho_2 r_2$ Elemente, welche nach Abzug der $\rho_2 r_2$ einer solchen zweiten Anordnung noch verfügbar sind, liefern auf $\frac{(n-\rho_1 r_1-\rho_2 r_2)\ldots(n-\rho_1 r_1-\rho_2 r_2-\rho_3 r_3+1)}{\rho_3!\,(r_3!)^{\rho_3}}$ Arten eine Anordnung von $\rho_3 r_3$ Elementen in ρ_3 Gruppen von r_3, u. s. w.; endlich die letzten $\rho_\sigma r_\sigma + m$ Elemente auf $\frac{(\rho_\sigma r_\sigma + m)\ldots(m+1)}{\rho_\sigma!\,(r_\sigma!)^{\rho_\sigma}}$ eine solche von $\rho_\sigma r_\sigma$ Elementen in ρ_σ Gruppen von r_σ.

Die ganze verlangte Anordnung in ρ_1 Gruppen von r_1, ρ_2 von r_2, ..., ρ_σ von r_σ Elementen lässt sich demnach aus n Elementen auf

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-\rho_1 r_1+1)}{\rho_1!\,(r_1!)^{\rho_1}}\cdot\frac{(n-\rho_1 r_1)\ldots(n-\rho_1 r_1-\rho_2 r_2+1)}{\rho_2!\,(r_2!)^{\rho_2}}\cdot\ldots\frac{(\rho_\sigma r_\sigma+m)\ldots(m+1)}{\rho_\sigma!\,(r_\sigma!)^{\rho_\sigma}}=\frac{n(n-1)\ldots(m+1)}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$$

verschiedene Arten herstellen, und so viele Werthe hat also auch ein Komplex der gegebenen Form. Diese Form ist aber die allgemeine jedes Transpositionenkomplexes, so dass auch der allgemeine Ausdruck der Werthezahl t eines solchen Komplexes dargestellt wird durch:

$$t=\frac{n(n-1)\ldots(m+1)}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}},\quad\text{also}=\frac{n!}{m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}\quad\text{für } m>0,$$

$$\text{und}=\frac{n!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}\quad\text{für } m+0$$

Dabei ist $\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n-m$.

§ 6.

Mit Hülfe dieses Ausdruckes ergiebt sich für die Werthezahl v einer Funktion von n Elementen, welche die Transpositionen des Komplexes zulässt, aus $v = qt$ die Beziehung:

$$v = q \frac{n!}{m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}} \quad (m! = 1 \text{ für } m = 0).$$

Und für die Werthezahl v einer Funktion von n Elementen, welche durch die Transpositionen des Komplexes denselben neuen Werth erhält, folgt aus $kv = 2qt$:

$$kv = 2q \frac{n!}{m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}} \quad (m! = 1 \text{ für } m = 0).$$

Hierin ist k, wie früher gezeigt (§ 3), sowohl $\leqq v-1$, als auch $\leqq \frac{n(n-1)}{2T}$, unter T die Transpositionenzahl des Komplexes verstanden. Diese letztere ist übrigens $= \frac{1}{2}\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda (r-1)$, da jede Transpositionsgruppe aus allen $\frac{1}{2}r(r-1)$ Transpositionen ihrer r Elemente besteht.

Der in $v = qt$ und $kv = 2qt$ auftretende Faktor q lässt sich genauer bestimmen. Nach § 3 ist nämlich qt die Werthezahl eines Paares von Funktionswerthen f_0, f, welche durch die Transpositionen eines Komplexes T von t Werthen in einander übergehen. Die Substitutionen, welche das Paar f_0, f nicht ändern, also höchstens f_0 mit f vertauschen, bilden aber offenbar eine Gruppe, so dass $qt = \frac{n!}{\gamma}$ ist, wenn γ die Ordnung dieser Gruppe bedeutet. Da nun f_0 und f durch alle Transpositionen von T einfach mit einander vertauscht werden, so wird das Paar f_0, f durch keine dieser Transpositionen geändert, also auch durch keine Zusammensetzung derselben. Solche Zusammensetzungen sind alle diejenigen Substitutionen, welche die Elemente des Komplexes nur innerhalb der Transpositionsgruppen vertauschen; die Zahl derselben ist $\Pi_1^\sigma (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}$, da alle r! Vertauschungen der r Elemente je einer Transpositionsgruppe und alle Producte solcher Vertauschungen aus verschiedenen Gruppen zu ihnen gehören. Diese $\Pi_1^\sigma (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}$ Substitutionen bilden wieder eine Gruppe, wie sich ohne Weiteres aus ihrer Definition ergiebt; und da sie sämmtlich in der Gruppe des Paares f_0, f enthalten sind, so ist die Ordnung γ dieser letzteren ein Vielfaches von $\Pi_1^\sigma (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}$, etwa

$= c\Pi_1^\sigma (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}$. Aus $qt = \frac{n!}{c\Pi_1^\sigma (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$ folgt aber, wegen

$t = \frac{n!}{m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$, $cq = m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!$, d. h. q ist Theiler

von $m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!$.

Jedenfalls ist $1 \leq q \leq m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!$, so dass aus $v = qt$ und $kv = 2qt$ die Ungleichungen folgen:

$$\frac{n!}{m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}} \leqq v \leqq \frac{n!}{\Pi_1^\sigma (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}, \text{ und}$$

$$\frac{2n!}{m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}} \leq kv \leq \frac{2n!}{\Pi_1^\sigma (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}, \text{ worin wieder}$$

$\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n-m$, und für $m = 0$ $m! = 1$ ist.

Zweiter Abschnitt.

§ 7.

Aus dem bisher Gefundenen lassen sich hinsichtlich der kleinsten Werthezahlen von Funktionen einige Schlüsse ziehen, welche der allgemeineren Untersuchung vorausgeschickt werden sollen.

Ist zunächst $m = 0$, so kann man $t = \frac{n!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$ in der Form schreiben: $t = \frac{n\,..\,(n-\rho_1 r_1 + 1)}{\rho_1!\,(r_1!)^{\rho_1}} \cdot \frac{(n-\rho_1 r_1)!}{(\Pi_2^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$, und hierin ist $\frac{(n-\rho_1 r_1)!}{\Pi_2^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$ wegen $\sum_2^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n-\rho_1 r_1$ offenbar eine ganze Zahl derselben Art wie $\frac{n!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$. t ist also Vielfaches von $\frac{n\,..\,(n-\rho_1 r_1 + 1)}{\rho_1!\,(r_1!)^{\rho_1}}$, und da auch $\frac{(\rho_1 r_1)!}{\rho_1!\,(r_1!)^{\rho_1}}$ ganz

ist, Vielfaches von $\frac{n\,..\,(n-\rho_1 r_1+1)}{(\rho_1 r_1)!}$. Nun hat man

$\frac{n\,..\,(n-p+1)}{p!} > \frac{n\,..\,(n-p+2)}{(p-1)!}$, so lange $\frac{n-p+1}{p} > 1$, d. h. $p < \frac{n}{2}$ ist; ferner $\frac{n\,..\,(n-p+1)}{p!} = \frac{n\,..\,(p+1)}{(n-p)!}$.

Mit Rücksicht darauf, dass die Zahl r der Elemente einer Transpositionsgruppe mindestens $= 2$ ist, dass also $\rho_1 r_1$ nicht $= 1$ und für $m = 0$ auch nicht $= n-1$ sein kann, sind folglich die kleinsten Werthe von $\frac{n\,..\,(n-\rho_1 r_1+1)}{(\rho_1 r_1)!}$:

1, für $\rho_1 r_1 = n$, und $\frac{n(n-1)}{2}$, für $\rho_1 r_1$ $(< n) = 2$ oder $= n-2$.

Für $\rho_1 r_1 = n$ ist $t = \frac{n!}{\rho_1 !\,(r_1 !)^{\rho_1}}$, oder, wegen $\rho_1 r_1 = n$,

$(\rho_1 - 1) r_1 = n - r_1$, etc., $t = \frac{(n-1)\,..\,(n-r_1+1)}{(r_1-1)!} \times$

$\frac{(n-r_1)\,..\,(n-2r_1+1)}{(r_1-1)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(2r_1-1)\,..\,(r_1+1)}{(r_1-1)!}$.

Dieser Ausdruck erlangt seinen kleinsten Werth 1 für $r_1 = n$, $\rho_1 = 1$.

Ist r_1 nicht $= n$, so ist es als Theiler von $n \leqq \frac{n}{2}$, und also $n > 3$, da $r_1 \geqq 2$ ist. Für $n = 4$ ist $r_1 = 2$, $\rho_1 = 2$, und folglich $t = n-1 = 3$, also $< n$. Ist $n = 6$, so ist entweder $r_1 = 2$, $\rho_1 = 3$, und $t = (n-1)(n-3) = 15 = \frac{n(n-1)}{2}$, oder $r_1 = 3$, $\rho_1 = 2$, und $t = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 10$, $> n$ und $< \frac{n(n-1)}{2}$.

Wird dagegen $n > 6$, also $\geqq 8$, da n keine Primzahl sein darf, so ist t jedenfalls $> \frac{n(n-1)}{2}$; denn für $r_1 = 2$ ist $t = (n-1)(n-3)\ldots$, also $> \frac{n(n-1)}{2}$ weil $n-3 > \frac{n}{2}$ ist; für $r_1 = 3$:

$t = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{2} \ldots$, also $> \frac{n(n-1)}{2}$ wegen $n-2 > \frac{n}{2}$ und $\frac{(n-4)(n-5)}{2} > 2$; für $r_1 > 3$ endlich ist schon der erste der Faktoren in t, nämlich $\frac{(n-1)\ldots(n-r_1+1)}{(r_1-1)!}$, $> \frac{n(n-1)}{2}$, da $\frac{(n-1)\ldots(n-r_1+1)}{(r_1-1)!} \geqq \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}$ und $n-3 > \frac{n}{2}$, $\frac{n-2}{3} \geqq 2$ ist.

Für $n > \rho_1 r_1 = 2$ wird $t = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)!}{\Pi_2^\sigma \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$, ist also $= \frac{n(n-1)}{2}$ für $r_2 = n-2$, $\rho_2 = 1$, und sonst $> \frac{n(n-1)}{2}$. Dabei ist $n > 4$, weil $\rho_2 r_2 > 2$ ist und aus $\rho_2 r_2 = 2 = \rho_1 r_1 : r_2 = 2 = r_1$ folgen würde.

Der Fall $\rho_1 r_1 = n-2$ führt auf den vorigen zurück, weil dann $\rho_2 r_2 = 2$ sein muss.

Ist m nicht $= 0$, so ist

$$t = \frac{n!}{m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}} = \frac{n \ldots (n-m+1)}{m!} \cdot \frac{(n-m)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$$

also Vielfaches von $\frac{n \ldots (n-m+1)}{m!}$, und diese Zahl hat die kleinsten Werthe n, für $m = 1$, und $\frac{n(n-1)}{2}$, für $m = 2$ oder $= n-2$. (Gleich $n-1$ kann m nicht sein, da die Zahl $n-m$ der Komplexelemente $\geqq 2$ ist.)

Genau $= n$ ist t, wenn $m = 1$ und $\frac{(n-1)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}} = 1$, d. h. $r_1 = n-1$, $\rho_1 = 1$ ist.

Ist (für $m = 1$) $\frac{(n-1)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$ nicht $= 1$, so kann diese

Zahl nach den Ergebnissen des Falles $m = 0$ nur für $n-1 = 4$ kleiner als $n-1$ werden, nämlich $= n-2$, ist also jedenfalls $> \frac{n(n-1)}{2}$, da auch $n(n-2)$ für $n = 5$ grösser als $\frac{n(n-1)}{2}$ ist.

Ist $m = 2$, so wird $t = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2)!}{\Pi_1^{\sigma} \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}$, also nur dann nicht $> \frac{n(n-1)}{2}$, wenn $\frac{(n-2)!}{\Pi_1^{\sigma} \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}} = 1$, d. h. $r_1 = n-2$, $\rho_1 = 1$ ist.

Ist endlich $m = n-2$, so muss $\rho_1 r_1 = 2$, also $r_1 = 2$, $\rho_1 = 1$, und $t = \frac{n(n-1)}{2}$ sein.

Die Werthezahl t eines Transpositionenkomplexes ist demnach entweder $= 1$, wenn $m = 0$, $r_1 = n$, $\rho_1 = 1$ ist; dann besteht der Komplex aus allen $\frac{n(n-1)}{2}$ Transpositionen;

oder $= n$, wenn $m = 1$, $r_1 = n-1$, $\rho_1 = 1$ ist; dann besteht der Komplex aus den $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Transpositionen von $n-1$ Elementen,

oder $= \frac{n(n-1)}{2}$, in den drei Fällen

$m = 0$, $r_1 = n-2$, $\rho_1 = 1$, $n > 4$,

$m = 2$, $r_1 = n-2$, $\rho_1 = 1$, $n > 4$, und

$m = n-2$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 1$;

wenn also der Komplex entweder die $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Transpositionen von $n-2$ Elementen enthält, oder aus einer einzigen Transposition besteht;

oder endlich es ist $t > \frac{n(n-1)}{2}$.

Ausgenommen sind nur die Fälle:

$n = 4$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 2$, wo $t = 3$, also $< n$,

$n = 6$, $r_1 = 3$, $\rho_1 = 2$, wo $t = 10$, also $> n$ und $< \frac{n(n-1)}{2}$ ist, und

$n = 6$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 3$, wo $t = 15$, also $= \frac{n(n-1)}{2}$ ist,

ohne dass der Komplex eine der für $t = \frac{n(n-1)}{2}$ angegebenen Eigenschaften besitzt.

§ 8.

Für Funktionen, welche Transpositionen zulassen, gilt nun eine Beziehung der Form

$$\frac{n!}{m!\,\Pi_1^{\sigma}\rho_\lambda!(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}} \leqq v \leqq \frac{n!}{\Pi_1^{\sigma}(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}},$$

worin $\sum_1^{\sigma}\rho_\lambda r_\lambda = n-m$, und $m! = 1$ für $m = 0$ ist.

Daraus folgt zunächst für

$$t = 1, \text{ also } m = 0,\ r_1 = n,\ \rho_1 = 1 : 1 \leqq v \leqq 1;$$

d. h. es ist dann auch $v = 1$. Die Funktion ist also symmetrisch, und in der That wird sie in diesem Falle durch keine Transposition geändert, lässt somit auch jede Zusammensetzung von Transpositionen zu, d. h. überhaupt jede Substitution.

Ebenso ist für $t = n$ auch $v = n$; denn durch $m = 1$, $r_1 = n-1$, $\rho_1 = 1$ erhält man $n \leqq v \leqq n$. Die Funktion ist dann symmetrisch in $n-1$ Elementen, da sie jede Transposition, also auch jede andere Substitution, in $n-1$ Elementen zulässt.

In allen übrigen Fällen ist v sicher grösser als n, da $t < n$ und $v \geqq t$ ist. Eine Ausnahme bildet nur der Fall $n = 4$, in welchem für $m = 0$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 2$ t den Werth 3 hat, so dass auch v möglicherweise $= 3$, also $< n$ ist.

Abgesehen von diesem Falle ist also eine Funktion von n Elementen, welche Transpositionen zulässt, entweder symmetrisch oder mindestens n werthig. Und zwar hat sie genau n Werthe nur dann, wenn sie in $n-1$ Elementen symmetrisch ist.

Weniger einfach verhält es sich mit den Functionen, welche keine Transpositionen zulassen. Für solche bestehen die Ungleichungen:

$$2\,\frac{n!}{m!\,\Pi_1^{\sigma}\rho_\lambda!(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}} \leqq kv \leqq 2\,\frac{n!}{\Pi_1^{\sigma}(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$$

oder $\frac{2t}{k} \leqq v \leqq \frac{2n!}{\Pi_1^{\sigma}(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$, und darin ist $k \leqq \frac{n(n-1)}{2T}$, wenn T wieder die Transpositionenzahl des Komplexes bedeutet.

Ist nun zunächst $t = 1$, also $m = 0$, $r_1 = n$, $\rho_1 = 1$, so wird $T = \frac{n(n-1)}{2}$, also $k \leqq \frac{n(n-1) \cdot 2}{2 \cdot n(n-1)}$ d. h. $= 1$, und es ergiebt sich $2 \leqq v \leqq 2$. Für $t = 1$ ist folglich $v = 2$. Ein Funktionswerth wird in diesem Falle durch jede Transposition in den nämlichen anderen Werth verwandelt, durch eine gerade Anzahl von Transpositionen also gar nicht geändert. Die Funktion lässt demnach alle geraden Substitutionen zu, d. h. sie ist alternirend.

Für $t = n$, also $m = 1$, $r_1 = n-1$, $\rho_1 = 1$, darf man $n > 3$ voraussetzen, weil der Fall $n = 3$ wegen $1 = n-2$ unter $m = n-2$, $t = \frac{n(n-1)}{2}$ gebracht werden kann. Es ist dann $k = 1$, da der Komplex aus allen Transpositionen von $n-1$ Elementen besteht, und sich aus den Transpositionen von mehr als 3 Elementen immer nur ein solcher Komplex bilden lässt. Mithin wird für $t = n > 3$: $2n \leqq v \leqq 2n$, d. h. $v = 2n$. (Für $n > 4$ folgt $k = 1$ auch schon aus $k \leqq \frac{n(n-1)}{2T}$ wegen $T = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ und $n-2 > \frac{n}{2}$.)

In allen anderen Fällen ist $t \geqq \frac{n(n-1)}{2}$, ausgenommen für $n = 4$ und $n = 6$. Wegen $k \leqq v-1$ ist aber $v(v-1) \geqq 2t$; für $t \geqq \frac{n(n-1)}{2}$ ist folglich $v(v-1) \geqq n(n-1)$, d. h. $v \geqq n$.

Zugleich ergiebt sich aus $v(v-1) \geqq 2t$, dass nur für $t = \frac{n(n-1)}{2}$ v genau $= n$ werden könnte. Abgesehen vom Falle $n = 6$ ist nun t nur dann $= \frac{n(n-1)}{2}$, wenn der Komplex entweder die $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Transpositionen von $n-2$ Elementen enthält, oder aus einer einzigen Transposition besteht. Im ersten Falle ist $T = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, also $k \leqq \frac{n(n-1)}{(n-2)(n-3)}$, so dass aus $v \geqq \frac{2t}{k}$ $v \geqq (n-2)(n-3)$ folgt.

$(n-2)(n-3)$ ist aber $> n$, sobald $n > 4$ ist, was ja in der That hier angenommen werden muss. Bestehen ferner im zweiten Falle alle Komplexe der Zerlegung nur aus je einer Transposition, so erhält die Funktion durch Transpositionen $\frac{n(n-1)}{2}$ verschiedene Werthe, von denen auch keiner dem ursprünglichen gleich ist; ihre Werthezahl v ist also sicher $> \frac{n(n-1)}{2}$, mithin auch $> n$, wenn $n > 2$ ist. $n = 2$ fällt wegen $\frac{n(n-1)}{2} = 1$ unter $t = 1$. Träte dagegen ein Komplex von mehr als einer Transposition in der Zerlegung auf, so könnte man diesen wählen und würde dadurch auf schon behandelte Fälle zurückkommen.

Eine Funktion von n Elementen, welche keine Transposition zulässt, ist also entweder alternirend (zweiwerthig), oder hat mehr als n Werthe. Ausnahmen könnten nur für $n = 4$ und $n = 6$ stattfinden.

§ 9.

Die Ausnahmefälle $n = 4$ und $n = 6$ sollen jetzt näher behandelt werden.

1) Für $n = 4$ ist $t = 3$, wenn $m = 0$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 2$ ist.

Der Komplex besteht dann aus zwei Transpositionsgruppen von je zwei Elementen, d. h. aus zwei Transpositionen, und hat die Form 12, 34. Die Werthezahl einer Funktion, welche diese Transpositionen zulässt, ist $v = 3q$, könnte also $= 3 < n$ werden. In der That ergiebt sich eine solche dreiwerthige Funktion von 4 Elementen einfach dadurch, dass man eine Funktion bildet, welche dem Komplexe 12, 34 hinsichtlich der Veränderlichkeit durch Substitutionen äquivalent ist. Man hat zu diesem Zwecke nur jede der Transpositionen des Komplexes durch die nämliche symmetrische Funktion ihrer beiden Elemente zu ersetzen, etwa
12 durch a_1a_2, 34 durch a_3a_4, oder 12 durch a_1+a_2, 34 durch a_3+a_4, und die so erhaltenen Funktionen ebenfalls symmetrisch zu verbinden, nur in anderer Weise, als die Elemente einer Transposition verbunden wurden. So erhält man z. B. die dreiwerthigen Funktionen $a_1a_2 + a_3a_4$ und $(a_1 + a_2)(a_3 + a_4)$.

Wird dagegen ein Werth f_0, einer Funktion f, welche keine Transposition zulässt, durch die Transpositionen 12, 34 in denselben andern Werth f_1 verwandelt, so führt die nicht im Komplexe enthaltene Transposition 23 f_0, f_1 in zwei neue

Werthe f_2, f_3 über, da f durch jede Transposition geändert werden soll, und nur Transpositionen des Komplexes f_0 und f_1 mit einander vertauschen. Ebenso verwandelt die Transposition 24 f_0, f_1 in zwei davon verschiedene Werthe f'_2, f'_3, von denen wenigstens einer sich auch von f_2 und f_3 unterscheiden muss, da die Komplexe der beiden Paare f_2, f_3 und f'_2, f'_3, nämlich 13, 24 und 14, 23, nicht dieselben sind. Die Werthezahl von f ist somit sicher grösser als $n = 4$.

---

2) Für $n = 6$ ist $t = 10$, also $> n$ und $< \frac{n(n-1)}{2}$, wenn $m = 0$, $r_1 = 3$, $\rho_1 = 2$ ist. Es ist dann die Zahl der Transpositionen des Komplexes $\frac{\rho_1 r_1 (r_1 - 1)}{2} = T = 6$, so dass aus $k \leqq \frac{n(n-1)}{2T}$ $k \leqq \frac{5}{2}$ d. h. $\leqq 2$ folgt. Wegen $v \geqq \frac{2t}{k}$ ist demnach $v \geqq 10$, d. h. auch in diesem Falle ist die Werthezahl einer Funktion, welche keine Transposition zulässt, $> n$.

Eine wirkliche Ausnahme bildet dagegen für solche Funktionen der Fall $m = 0$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 3$ für $n = 6$. Es ist dann $t = 15 = \frac{n(n-1)}{2}$, während der Komplex weder alle Transpositionen von $n-2 = 4$ Elementen enthält, noch aus einer einzigen Transposition besteht. Vielmehr zerfällt derselbe in drei Transpositionsgruppen von je zwei Elementen, d. h. in drei Transpositionen, und ist von der Form: 12, 34, 56. Da also $T = 3$ ist, so wird $k \left(\leqq \frac{n(n-1)}{2T}\right) \leqq 5$, und v könnte, wegen $v \geqq \frac{2t}{k}$, für $k = 5$ den Werth $6 = n$ erhalten. Damit aber $k = 5$ werde, müssen sich die 15 Transpositionen der 6 Elemente in 5 Komplexe der Form 12, 34, 56 zerlegen lassen, und das ist in der That möglich, und zwar auf 6fache Weise. Eine Transposition 12 lässt sich nämlich auf drei verschiedene Arten zu einem Komplexe der gegebenen Form vervollständigen: durch 34, 56, oder 35, 46, oder 36, 45. Wählt man eine dieser Arten, etwa 34, 56, so kann man eine vierte Transposition 13 noch in zweifacher Weise ergänzen: durch 45, 62 oder 46, 52. Dagegen lassen sich aus den 9 übrigen Transpositionen 3 Komplexe der Form 12, 34, 56 nur mehr auf eine einzige Art herstellen. Somit ergeben sich, wie behauptet,

6 Arten der verlangten Zerlegung, und dem entsprechend ist 6 auch die Zahl der verschiedenen Werthe, welche das Schema:

12, 34, 56
13, 45, 62
14, 52, 36
15, 23, 46
16, 35, 24

durch Substitution erhalten kann. Nun ist dieses Schema nicht symmetrisch in 5 Elementen; denn es wird z. B. durch jede der beiden Transpositionen 12, 34 geändert. Eine ihm äquivalente Funktion von 6 Elementen ist also nicht nur ebenfalls 6 werthig, sondern genügt auch den Bedingungen des vorliegenden Falles, weil dieser der einzige ist, in welchem eine Funktion von n Elementen n Werthe haben könnte, ohne symmetrisch in n—1 Elementen zu sein. Eine solche äquivalente Funktion erhält man einfach dadurch, dass man die 5 Komplexe des Schema's durch äquivalente Werthe V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 einer Funktion V ersetzt, etwa

$$12, 34, 56 \text{ durch } V_1 = a_1 a_2 + a_3 a_4 + a_5 a_6$$

$$\text{oder } V_1 = (a_1 + a_2)(a_3 + a_4)(a_5 + a_6),$$

und diese Ausdrücke symmetrisch verbindet, nur in anderer Weise, als die Ausdrücke für die Transpositionen desselben Komplexes in dem entsprechenden Werthe V miteinander verbunden sind. So sind z. B.

$$\prod_1^5 V_\lambda = V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 = (a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6) \cdot\cdot \times \cdot\cdot (a_1a_6 + a_3a_5 + a_2a_4)$$

und

$$V_1+V_2+V_3+V_4+V_5=(a_1+a_2)(a_3+a_4)(a_5+a_6)+\cdot\cdot(a_1+a_6)(a_3+a_5)(a_2+a_4)$$

6 werthige Funktionen von 6 Elementen, welche durch jede Transposition geändert werden (im algebraischen Sinne).[6])

Mit Rücksicht auf das Vorhergehende lässt sich nun der Satz aussprechen:

Eine Funktion von n Elementen ist entweder symmetrisch (einwerthig), oder alternirend (zweiwerthig), oder hat mindestens n Werthe, mit Ausnahme des Falles $n = 4$, in welchem Funktionen von nur drei Werthen vorhanden sind.

Und zwar hat die Funktion genau n Werthe dann, und nur dann, wenn sie in n—1 Elementen symmetrisch ist; in dem einzigen Falle $n = 6$ giebt es sechswerthige Funktionen ohne diese Eigenschaft.

---

[6]) Vgl. *Serret*, Hdb. d. höh. Algebra, Bd. II, Theil IV, Kap. V.

Zweiter Theil.

Einleitung.

§ 1. Eigenschaften der Zerlegung; die Zahl k.
§ 2. Allgemeine Eintheilung und Begrenzung der Untersuchung.

Erster Abschnitt.

Funktionen, die keine Transpositionen zulassen.

§ 3. Vorbemerkungen.

1. Hauptfall $m = 0$.

§ 4. $\rho_1 r_1 = n : r_1 = n$; $r_1 = 2$.
§ 5. Ausnahmefälle $n = 4$ und $n = 6$.
§ 6. Ausnahmefall $n = 8$.
§ 7. $\rho_1 r_1 = n : r_1 = 3$; Ausnahmefall $n = 6$; $r_1 > 3$.
§ 8. $\rho_1 r_1 < n : n-2 > \rho_1 r_1 > 2$; $\rho_1 r_1 = 2$; $\rho_1 r_1 = n-2$.

2. Hauptfall $m > 0$.

§ 9. $m < \frac{n}{2} : r_1 = n-m$; $r_1 < n-m$.
§ 10. $m \geqq \frac{n}{2} : n-m > 3$; $n-m = 3$.

Die Fälle $\rho_1 r_1 = n-m$, $r_1 = 2$, $\rho_1 < 5$.

§ 11. Vorbemerkungen. Die Fälle $n-m = 8$ und $n-m = 6$.
§ 12. Ausnahmefälle $n = 7$.
§ 13. Der Fall $n-m = 4$.
§ 14. Ausnahmefälle $n = 5$ und Fall $n = 6$.
§ 15. Der Fall $n-m = 2$ im Allgemeinen.
§ 16. $n-m = 2 : n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.
§ 17. Sätze für Funktionen, die keine Transposition zulassen.

Zweiter Abschnitt.

Funktionen, welche Transpositionen zulassen.

§ 18. Vorbemerkungen.

1. Hauptfall $m = 0$.

§ 19. $\rho_1 r_1 = n : r_1 = n$; $r_1 > 4$; $r_1 = 2$; Ausnahmefälle $n = 4, n = 6$; $r_1 = 3$; Ausnahmefall $n = 6$; $r_1 = 4$; Ausnahme $n = 8$.
§ 20. $\rho_1 r_1 < n : n-3 > \rho_1 r_1 > 3$; $\rho_1 r_1 = n-2$; $\rho_1 r_1 = 3$; $\rho_1 r_1 = n-3$.

2. Hauptfall $m > 0$.

§ 21. $n-3 > m > 3$; $m = 1$; $m = 2$; $m = n-2$; $m = 3$; $m = n-3$.
§ 22. Sätze für Funktionen, welche Transpositionen zulassen.

Dritter Abschnitt.

§ 23. Allgemeine Sätze.
§ 24. Gruppe und transitiver Charakter einer Funktion.
§ 25. Transitiver Charakter der Ausnahmefunktion.

Einleitung.

§ 1.

Wie schon erwähnt kann die zu einem Funktionswerthe f_0 gehörige Zerlegung Z_0 durch keine der Substitutionen geändert werden, welche f_0 zulässt, da Z_0 durch f_0 eindeutig bestimmt ist. Das Zerlegungsschema Z_0 muss also, abgesehen von der Reihenfolge seiner Komplexe, durch jede Transposition des Komplexes der zugelassenen Transpositionen ungeändert bleiben; es darf sich ferner nicht ändern, wenn man irgend zwei Transpositionen eines andern seiner Komplexe in ihm vollzieht, da zwei Transpositionen, welche beide f_0 in f_i verwandeln, nacheinander angewandt, f_0 durch f_i in sich selbst zurückführen.

Diese wichtige Eigenschaft der Zerlegung führt unter Anderem zu einer neuen Bestimmung von k, welche Zahl angiebt, wie viele Paare von Funktionswerthen aus f_0 (T_i) f_i durch Substitution entspringend den Werth f_0 gemein haben, und die also höchstens der Zahl der verschiedenen Werthe des Komplexes T_i gleich ist, welche in derselben Zerlegung vorkommen.

Soll nämlich ein zweiter Werth des gegebenen Komplexes der nämlichen Zerlegung angehören, so darf derselbe offenbar keine Transposition des ersten enthalten, und es darf also auch keine seiner Transpositionsgruppen mehr als ein Element mit einer Gruppe des ersten gemein haben. Sei nun im ersten Werthe eine Transpositionsgruppe von mehr als zwei Elementen vorhanden, welche kurz durch $[1\ 2\ 3\ \ldots\ r]$ bezeichnet werden möge, so tritt eine solche Gruppe $[i_1 i_2 i_3 \ldots i_r]$ von $r > 2$ Elementen natürlich auch im zweiten Komplexwerthe auf. Dann lässt sich zunächst zeigen, dass $[i_1 i_2 i_3 \ldots i_r]$ mit $[1\ 2\ 3\ \ldots\ r]$ auch nicht einmal ein Element gemein haben kann. Denn wäre z. B. $1 = i_1$, so würde das Transpositionenpaar (12)(13) die Gruppe $[1 i_2 i_3 \ldots i_r]$ in $[2 i_2 i_3 \ldots i_r]$ umwandeln, da $i_2 i_3 \ldots i_r$ sämmtlich von $2\ 3\ \ldots\ r$ verschieden sind. $[2 i_2 i_3 \ldots i_r]$ hat aber mit $[1 i_2 i_2 \ldots i_r]$ mindestens die Transposition $(i_2 i_3)$ gemein, wegen $r > 2$, kann also weder demselben, noch auch irgend einem andern Komplexe der nämlichen Zerlegung angehören. Und folglich würde die Zerlegung durch ein Transpositionenpaar eines ihrer Komplexe geändert werden, was unmöglich

ist. — Es kann aber auch im ganzen zweiten Komplexwerthe keines der Elemente von [1 2 3 . . r] vorkommen. Wäre nämlich (1x) eine Transposition des zweiten Werthes, so würde man durch (12)(13) aus (1x) (2x) erhalten, da x keines der Elemente 2 3 . . r sein dürfte. Die Gruppe $[i_1 i_2 i_3 . . i_r]$ bleibt nun durch (12)(13) ungeändert, weil sie nach dem Vorigen kein Element mit [1 2 3 . . r] gemein haben kann; soll also die Zerlegung das Transpositionenprodukt (12)(13) zulassen, so darf auch der ganze zweite Komplexwerth durch diese Substitution nicht geändert werden. (2x) müsste somit ebenfalls in ihm vorkommen. Dann würde der Komplex aber auch (12) enthalten, also eine Transposition des ersten Werthes, was nicht zulässig ist. — Endlich ergiebt sich auch, dass zwei Werthe eines Komplexes, der eine Transpositionsgruppe [1 2 3..r] von mehr als 2 Elementen besitzt, überhaupt kein Element gemein haben können. Denn wäre das Element x sowohl in der Transposition (xx_1) des ersten, als in derjenigen (xx_2) des zweiten Werthes enthalten, wo nun x, x_1 und x_2 in keiner der Gruppen [1 2 3 . . r] und $[i_1 i_2 i_3 . . i_r]$ vorkommen können, so würde durch (12)(xx_1) (xx_2) in $(x_1 x_2)$ übergehen, $[i_1 i_2 i_3 . . i_r]$ dagegen ungeändert bleiben. Der zweite Komplexwerth könnte sich also dabei nicht ändern und müsste folglich auch $(x_1 x_2)$ enthalten. $(x_1 x_2)$ und (xx_2) würden aber (xx_1) nach sich ziehen, so dass beide Werthe die Transposition (xx_1) gemein hätten, was unmöglich ist. — Verschiedene Werthe eines Komplexes, der eine Transpositionsgruppe von mehr als zwei Elementen enthält, können also nur dann derselben Zerlegung angehören, wenn sie ohne gemeinsames Element sind. Die Anzahl solcher Werthe in einer Zerlegung ist somit $\leqq \frac{n}{n-m}$, wenn n—m wie früher die Zahl der Elemente des Komplexes bezeichnet. Dieser Anzahl ist aber k höchstens gleich; hat also der Komplex eine Transpositionsgruppe von mehr als zwei Elementen, so besteht die Ungleichung $k \leqq \frac{n}{n-m}$, welche k offenbar weit genauer bestimmt, als die bisher benützte $k \leqq \frac{n(n-1)}{2T}$.

Aber auch in dem Falle, dass der gegebene Komplex nur Transpositionsgruppen von je zwei Elementen enthält, können zwei derselben Zerlegung angehörige Werthe nur dann Elemente gemein haben, wenn die Zahl der Gruppen, d. h. hier

der Transpositionen, des Komplexes nicht grösser als 4 ist. Treten nämlich mehr als vier Transpositionen von je zwei anderen Elementen im Komplexe auf, etwa die fünf: (0 1) (2 3) (4 5) (6 7) (8 9), so lässt ein Paar dieser Transpositionen, in einem zweiten Werthe des Komplexes vollzogen, wenigstens eine Transposition dieses letzteren ungeändert, da die vier Elemente des Paares höchstens in vier Transpositionen vorkommen können. Der zweite Werth darf also, um derselben Zerlegung anzugehören, durch kein Transpositionenpaar des ersten geändert werden. Dieser Bedingung genügt er aber nur, wenn er mit letzterem kein Element gemein hat. Denn enthielte er z. B. das Element 2 in der Transposition $(2\varkappa)$, so würde durch (23)(45) aus $(2\varkappa)$ $(3\varkappa')$ folgen, und es müsste also auch $(3\varkappa')$ im Komplexe vorkommen. Da folglich $\varkappa$ nicht $= \varkappa'$ sein darf und ausserdem von 3 verschieden sein muss, so müsste $\varkappa$ durch (45) geändert werden, also eines der Elemente 4 oder 5 sein. Ebenso würde sich aber bei Anwendung von (23)(67) ergeben, dass $\varkappa$ mit einem der Elemente 6 oder 7 identisch sein müsste, was widersinnig ist.

Folglich ist auch für $r = 2$, $\rho r = n-m$, $\rho > 4 : k \leq \frac{n}{n-m}$, und diese Beziehung hat somit allgemeine Gültigkeit, mit Ausnahme der Fälle $r = 2$, $\rho r = n-m$, $\rho < 5$.

Zur Auffindung der Werthe selbst, welche k in den einzelnen Fällen besitzen kann, ist folgende Ueberlegung von Nutzen.

Betrachtet man die k Paare von Funktionswerthen, die aus $f_0\,(T_i)\,f_i$ durch Substitution entspringend, den Werth f_0 gemein haben, so erkennt man leicht, dass die Gesammtheit derselben als solche durch keine der Substitutionen geändert werden kann, welche f_0 zulässt. Denn sonst müssten eben ausser jenen k noch andere Paare durch Substitution aus $f_0\,(T_i)\,f_i$ hervorgehen, welche f_0 enthielten. Da nun jedes Paar seinen Komplex eindeutig bestimmt, so bleibt auch die Gesammtheit K der zugehörigen k Komplexe bei jeder Substitution ungeändert, welche f_0 nicht ändert. Diese Gesammtheit ist offenbar Theil der zu f_0 gehörigen Zerlegung; sie ist somit eine jener § 2 des ersten Theiles erwähnten Gruppen, in welche die Zerlegung zerfällt, und deren Komplexe durch jede Substitution der Gruppe von f_0 nur untereinander vertauscht werden. Wie die ganze Zerlegung wird also auch das Schema K sich nicht ändern dürfen, wenn man irgend zwei

Transpositionen eines seiner Komplexe in ihm vollzieht. Sollen demnach mehrere Werthe eines Komplexes demselben Schema K angehören, so muss das Nämliche mit allen neuen Werthen der Fall sein, die man durch je zwei Transpositionen eines von ihnen aus den übrigen erhalten kann.

§ 2.

Für die nähere Behandlung theilen sich nun die Funktionen naturgemäss in solche, welche Transpositionen zulassen, und in solche, welche durch jede Transposition geändert werden, da die Werthezahl v der ersteren ausser der allgemeinen Beziehung $kv = 2qt$ noch der einfacheren $v = q_1 t_1$ genügt, unter t_1 die Werthezahl des zugelassenen Komplexes verstanden.

Die Funktionen, welche keine Transposition zulassen, sind als die ursprünglicheren zuerst zu untersuchen. Denn fasst man eine Funktion von n Elementen, welche Transpositionen zulässt, als Funktion der m Elemente auf, die im Komplexe der zugelassenen Transpositionen fehlen, so fällt dieselbe unter die Funktionen von m Elementen, welche durch jede Transposition geändert werden, so dass ihre vollständige Behandlung die Erörterung dieser letzteren voraussetzt.

Um übrigens die Untersuchung nicht allzuweit auszudehnen, sollen die kleinsten Werthezahlen von $n = 8$ ab nur bis zur Grenze $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ aufgesucht werden, und für $n < 8$ bis zur Grenze $n(n-1)$, die für solche n über der sonst höheren $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ liegt, während sie für $n = 8$ mit ihr zusammenfällt.

Erster Abschnitt.

Funktionen, welche keine Transposition zulassen.

§ 3.

Für solche gilt nur eine Beziehung der Form:

$$kv = 2qt = 2q \frac{n!}{m! \prod_1^\sigma \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}},$$

worin $\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n - m$ und für $m = 0$ $m! = 1$ ist. q ist

Theiler von $m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!$; k genügt in allen Fällen der Ungleichung: $k \leqq \frac{n(n-1)}{2T}$, d. h. $\leqq \frac{n(n-1)}{\Sigma \rho_\lambda r_\lambda (r_\lambda - 1)}$, und mit Ausnahme der vier Fälle $r = 2$, $\rho r = n-m$, $\rho < 5$ auch der genaueren $k \leqq \frac{n}{n-m}$.

Bei der Untersuchung empfiehlt sich eine Eintheilung nach der Zahl m der im Komplexe fehlenden Elemente. Denn einestheils ist $t = \frac{n \,..\, (n-m+1)}{m!} \cdot \frac{(n-m)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}$, also Vielfaches von $\frac{n \,..(n-m+1)}{m!}$, und die Werthe dieser Zahl wachsen, wie schon gezeigt, wenn m gegen $\frac{n}{2}$ hin wächst oder abnimmt, ein Umstand, der für die Auffindung der kleinsten Werthe von v in Betracht kommt. Andererseits ist, wie ebenfalls schon bemerkt, $\frac{(n-m)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}} \left(\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n-m\right)$ eine ganze Zahl derselben Art wie $\frac{n!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}} \left(\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n\right)$, führt also auf den Fall $m = 0$ zurück.

§ 4.

Es sei demnach

$$1)\ m = 0,$$

d. h. der Komplex enthalte alle n Elemente. Dann ist

$$t = \frac{n!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}} = \frac{n \,..\, (n-\rho_1 r_1 + 1)}{\rho_1 ! (r_1 !)^{\rho_1}} \cdot \frac{(n-\rho_1 r_1)!}{(\Pi_2^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}$$

$$= \frac{n \,..\, (n-\rho_1 r_1 + 1)}{(\rho_1 r_1)!} \cdot \frac{(\rho_1 r_1)!}{\rho_1 ! (r_1 !)^{\rho_1}} \cdot \frac{(n-\rho_1 r_1)!}{\Pi_2^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}},$$

also Vielfaches von $\frac{n \,..\, (n-\rho_1 r_1 + 1)}{(\rho_1 r_1)!}$. Diese Zahl wächst,

wenn $\rho_1 r_1$ gegen $\frac{n}{2}$ hin zu- oder abnimmt, und man kann den Hauptfall $m = 0$ nach den zunehmenden Werthen von $\frac{n \,..\, (n - \rho_1 r_1 + 1)}{(\rho_1 r_1)!}$ in eine Reihe besonderer Fälle theilen.

a) Der kleinste Werth 1 von $\frac{n \,..\, (n-\rho_1 r_1 + 1)}{(\rho_1 r_1)!}$ tritt ein für $\rho_1 r_1 = n$, also $t = \frac{n!}{\rho_1 ! (r_1 !)^{\rho_1}}$.

t wird dann seinerseits $= 1$, wenn $\rho_1 = 1$, $r_1 = n$ ist. In diesem Falle wird $k \leqq \frac{n(n-1)}{n(n-1)}$, d. h. $= 1$, ebenso $q = 1$ als Theiler von $\rho_1 ! = 1$, und folglich $v = 2$ (wegen $kv = 2qt$). Die entsprechenden Funktionen sind bereits untersucht: sie erhalten durch jede Transposition den nämlichen andern Werth und sind somit alternirend. Bekanntes Beispiel einer alternirenden Funktion ist das Differenzenprodukt $\Pi_1^n (a_\varkappa - a_\lambda) = {}_1\Delta_n$.

Wenn nicht $= n$, so ist r_1 als Theiler von $n \leqq \frac{n}{2}$, n also > 3, da r_1 als Zahl der Elemente einer Transpositionsgruppe mindestens $= 2$ ist. Wegen

$$\rho_1 r_1 = n, \quad (\rho_1 - 1) r_1 = n - r_1, \quad (\rho_1 - 2) r_1 = n - 2r_1 \text{ etc.}$$

ist dann

$$\frac{n!}{\rho_1 ! (r_1 !)^{\rho_1}} = \frac{(n-1) \,..\, (n - r_1 + 1)}{(r_1 - 1)!} \times \frac{(n - r_1 - 1) \,..\, (n - 2r_1 + 1)}{(r_1 - 1)!} \cdots \frac{(2r_1 - 1) \,..\, (r_1 + 1)}{(r_1 - 1)!} = t,$$

und in diesem Produkte ist jeder Faktor

$$\frac{(n - \varkappa r_1 + 1) \,..\, (n - \varkappa + 1 \, r_1 + 1)}{(r_1 - 1)!}$$

eine ganze Zahl, da er angiebt, auf wie viele verschiedene Arten sich $(r_1 - 1)$ Elemente aus $(n - \varkappa r_1 + 1)$ herausnehmen lassen. t ist daher z. B. Vielfaches von $\frac{(n-1) \,..\, (n - r_1 + 1)}{(r_1 - 1)!}$.

Ist nun zunächst $r_1 = 2$, also n gerade und $\geqq 4$, so wird $t = (n-1)(n-3)(n-5)\ldots 3 \cdot 1$, und von $n = 10$ an $\rho_1 > 4$, also $k \leqq \frac{n}{n-m}$, d. h. $= 1$, wegen $m = 0$. Für $r_1 = 2$, $\rho_1 r_1 = n$, $n \geqq 10$ hat man somit $v = 2q(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 3 \cdot 1$, eine Zahl, welche die Grenze $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ weit übersteigt, da für $n \geqq 10$ $n-3 > \frac{n}{2}$ und $n-5 > \frac{n-2}{3}$ ist.

Ist dagegen die gerade Zahl n kleiner als 10, also eine der Zahlen 4, 6, 8, da sie $\geqq 4$ sein soll, so kann man für k nur die Ungleichung $k \leqq \frac{n(n-1)}{\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda (r_\lambda - 1)}$ benützen, die in diesem Falle $k \leqq n-1$ liefert. Aus $kv = 2q(n-1)(n-3)\ldots 3 \cdot 1$ folgt dann für v die untere Grenze $2(n-3)\ldots 3 \cdot 1$, und diese liegt für $n \leqq 8$ unterhalb $n(n-1)$. Die Fälle $n = 4$, $n = 6$, $n = 8$ sollen daher besonders untersucht werden.

§ 5.

Für $n = 4$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 2$ ist im § 9 des ersten Theiles gezeigt worden, dass $v > 4$ sein muss. Die genauen Werthe von v erhält man aus $kv = 2qt$, wenn man beachtet, dass im vorliegenden Falle $t = 3$, und q Theiler von $\rho_1! = 2$, d. h. $= 1$ oder $= 2$ ist. Danach ist nämlich $kv = 6$ $(q = 1)$ oder $= 12$ $(q = 2)$, also v, welches > 4 sein soll, entweder $= 6 = \frac{n(n-1)}{2}$ für $\begin{cases} q = 1, & k = 1 \\ q = 2, & k = 2 \end{cases}$ oder $= 12$ für $k = 1$, $= n(n-1)$ $q = 2$. Der Komplex hat hier die Form 12, 34; ersetzt man jede seiner Transpositionen durch die Differenz ihrer Elemente, so ist das Produkt der beiden Differenzen $(a_1 - a_2) \cdot (a_3 - a_4)$ eine sechswerthige Funktion von vier Elementen, welche den gegebenen Bedingungen genügt. Denn jedem der drei Werthe des Komplexes entsprechen zwei (entgegengesetzte) der Funktion, welche durch die Transpositionen des Komplexwerthes miteinander vertauscht werden. Dabei ist $k = 1$, $q = 1$ oder $k = 2$, $q = 2$, je nachdem die zum Paare vereinigten Werthe entgegengesetzte sind oder nicht. Und die 6 werthige Funktion: $(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)$ ist ein besonderer Fall der 12 werthigen:

$(a_1-a_2)^{2\lambda_1+1} \cdot (a_3-a_4)^{2\lambda_2+1}$, die gleichfalls bei jeder der Transpositionen 12, 34 ihr Zeichen wechselt.

Für $n = 6$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 3$, also $t = 15$, ist $2(n-3)(n-5)..$ $= 6$, und entsprechende 6 werthige Funktionen von 6 Elementen sind in der That bereits hergestellt (Theil I, § 9). Für solche ist in $kv = 2qt = 30q$ $q = 1$, $k = 5$, und die zugehörige Zerlegung besteht aus fünf Komplexen der Form 12, 34, 56. Zwei dieser Komplexe ziehen aber die andern drei nothwendig nach sich, d. h. die Zerlegung enthält entweder nur einen Komplex der gegebenen Form oder fünf. Da dieselbe nämlich ungeändert bleiben muss, wenn man irgend zwei Transpositionen eines ihrer Komplexe in ihr vollzieht, so muss jeder neue Komplex, den man aus zweien: $\begin{matrix}12,\ 34,\ 56\\13,\ 45,\ 62\end{matrix}$ durch zwei Transpositionen des einen erhalten kann, ebenfalls der Zerlegung angehören. Wendet man aber auf 13 45 62 das Transpositionenprodukt (34)(56) an, so ergiebt sich der dritte Komplex 14 36 52; ferner durch (56)(12) der vierte 23 46 51; und endlich durch (12)(34) der fünfte 24 35 61. Demnach ist auch k entweder $= 1$ oder $= 5$ (§ 1). Für $k = 1$ ist $v = 30q$, also Vielfaches von $30 = n(n-1)$.

Eine entsprechende Funktion von 30 Werthen erhält man wieder, indem man jede Transposition des gegebenen Komplexes 12 34 56 durch die Differenz ihrer beiden Elemente ersetzt und aus den entstehenden drei Differenzen das Produkt $(a_1-a_2)(a_3-a_4)(a_5-a_6)$ herstellt. Dasselbe wechselt nämlich bei den drei Transpositionen 12, 34, 56 einfach das Zeichen, so dass jedem der 15 Komplexwerthe zwei (entgegengesetzte) Funktionswerthe zugeordnet sind.

[Wie in diesem und einem früheren Falle $(n-4)$ braucht man übrigens auch allgemein für die Transpositionen eines gegebenen Komplexes nur die Differenzen ihrer Elemente zu setzen und das Produkt dieser Differenzen zu bilden, um eine Funktion zu erhalten, der jede Transposition des Komplexes, aber auch nur eine solche, den nämlichen andern Werth ertheilt. Da nämlich eine Transpositionsgruppe des Komplexes aus sämmtlichen Transpositionen ihrer Elemente besteht, so hat der erhaltene Ausdruck das alternirende Differenzenprodukt der Elemente jeder Gruppe zum Faktor und wechselt daher bei jeder Transposition des Komplexes einfach sein Zeichen. Im Uebrigen ist er symmetrisch in den Elementen, welche im Komplexe fehlen, und hat die doppelte Werthezahl des Kom-

plexes, da einem Werthe des letzteren immer zwei (entgegengesetzte) Funktionswerthe entsprechen.]

Ist $k = 5$, so folgt aus $5v = 30q$ oder $v = 6q$, ausser $v = 6$ für $q = 1$, als nächstgrössere Werthezahl $v = 12 = 2n$ für $q = 2$. Funktionen, welche den Bedingungen dieses Falles genügen, erhält man einfach dadurch, dass man die Komplexe der zugehörigen Zerlegung: 12 34 56
13 45 62
14 36 52
23 46 51
24 35 61 wieder durch äquivalente Funktionen ersetzt, etwa durch

$$V_1 = a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6$$
$$V_2 = a_1a_3 + a_4a_5 + a_6a_2$$
$$V_3 = a_1a_4 + a_3a_6 + a_5a_2$$
$$V_4 = a_2a_3 + a_4a_6 + a_5a_1$$
$$V_5 = a_2a_4 + a_3a_5 + a_6a_1$$

und aus den fünf Ausdrücken V, deren Produkt

$$\Pi_5^1 V_\lambda = V_1V_2V_3V_4V_5$$

eine sechswerthige Funktion lieferte, das Differenzenprodukt

$$\Pi_1^5(V_\varkappa - V_\lambda) = {}_1\Delta_5(V)$$ herstellt.

Denn wendet man auf: V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 den Cyklus vierter Ordnung (3 5 4 6) an, so erhält man der Reihe nach V_1, V_4, V_5, V_3, V_2, und diese Anordnung liefert den Werth $-{}_1\Delta_5(V)$, da sie durch eine ungerade Substitution in den Grössen V aus der ursprünglichen hervorgeht. ${}_1\Delta_5(V)$ hat demnach in der That 12 Werthe, da jedem der 6 Werthe des Produktes $\Pi_1^5 V_\lambda$ zwei (entgegengesetzte) Werthe von ${}_1\Delta_5(V)$ entsprechen. Für den Nachweis, dass zu ${}_1\Delta_5(V)$ auch die gegebene Zerlegung gehört, genügt es, dass ${}_1\Delta_5(V)$ durch die Transpositionen eines einzigen Komplexes 12 34 56 den nämlichen andern Werth erhält. Denn wegen $v = 12$ folgt dann aus $kv = 30q$: $k = \frac{5q}{2}$, also $k = 5$ $(q = 2)$, da k hier nicht > 5 sein kann. Nun ergiebt sich aus V_1, V_2, V_3, V_4, V_5

durch (12): V_1, V_6, V_7, V_8, V_9
durch (34): V_1, V_9, V_8, V_7, V_6 und
durch (56): V_1, V_8, V_9, V_6, V_7;

diese drei Anordnungen gehen aber durch gerade Substitutionen in V_1, V_6, V_7, V_8, V_9 auseinander hervor, liefern also denselben Werth von $\Delta(V)$.[1])

[1]) *E. Mathieu* gab für die 12werthigen Ausnahmefunktionen von 6 Elementen das allgemeine Beispiel $\varphi + \psi \,.\, {}_1\Delta_6$, worin φ und ψ 6werthige

Die beiden Fälle $v = 6$ und $v = 12$ sind für $k = 5$ die einzig möglichen. Denn die Funktion wird durch irgend zwei Transpositionen eines Komplexes der zugehörigen Zerlegung:

12 34 56
13 45 62
14 36 52
23 46 51
24 35 61

nicht geändert. Ihre Gruppe enthält also z. B. die Transpositionenprodukte (34)(56), (56)(12), (12)(34), und da diese Substitutionen mit der identischen 1 zusammen eine Gruppe vierter Ordnung bilden, so ist die Ordnung der Funktionsgruppe Vielfaches von 4. Dieser Gruppe gehört ferner jede Zusammensetzung solcher Transpositionenpaare an. Die Zusammensetzung (12)(34)(13)(45) liefert aber den Cyklus fünfter Ordnung (12354), und das Produkt (12)(34)(45)(62) die Substitution dritter Ordnung (162)(354). Die Ordnung der Funktionsgruppe ist folglich auch Vielfaches von 5 und von 3, überhaupt also theilbar durch $3 . 4 . 5$. Da nun $n!$ im vorliegenden Falle $= 2 . 3 . 4 . 5 . 6$ ist, so kann die Werthezahl, wie behauptet, höchstens $= 2 . 6 = 12$ sein. Für $n = 6$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 3$ ist also v entweder $= 6$, oder $= 12$, oder Vielfaches von $30 = n(n-1)$.

§ 6.

Ist endlich $n = 8$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 4$, so könnte nach $kv = 2qt = 2q\,(n-1)(n-3)(n-5) = 2 . 7 . 5 . 3q$ für $k = 7$, $q = 1$: $v = 30$, also $< n(n-1) = 56$ werden. Die zugehörige Zerlegung würde dann aus 7 Komplexen der Form 12 34 56 78 bestehen. Es fragt sich, in welcher Weise eine solche Zerlegung möglich ist. Eine Transposition 12 lässt sich auf 15 verschiedene Arten zu einem Komplexe der gegebenen Form ergänzen, auf so viele Arten nämlich, als die übrigen 6 Elemente in 3 Paare zu bringen sind. Wählt man eine dieser Arten, etwa 12 34 56 78, so kann man zur Bildung eines zweiten Komplexes, mit der Transposition 13, entweder so verfahren, dass man 2 mit dem andern Elemente des Paares 34 zur Transposition 24 vereinigt, oder man könnte eines der vier Elemente 5, 6, 7, 8 mit 2 verbinden. Das letzte Verfahren würde z. B. den Komplex 13 25 47 68 liefern, und dieser würde durch das Transpositionenpaar (12)(34) des ersten

---

nahmefunktionen dieser Elemente bezeichnen, während $_1\Delta_6$ das alternirende Differenzenprodukt derselben ist. Im Texte ist absichtlich eine andere Darstellung gewählt. Eine dritte Form erhält man, wenn man die den Summen $a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6$ etc. entsprechenden Differenzenprodukte $(a_1a_2 - a_3a_4)(a_3a_4 - a_5a_6)(a_5a_6 - a_1a_2)$ etc. miteinander multiplicirt.

Komplexes in 24 15 37 68 verwandelt werden. Der neue Komplex 24 15 37 68 müsste also ebenfalls der Zerlegung angehören, was unmöglich ist, da er mit 13 25 47 68 die Transposition 68 gemein hat. In einem zweiten Komplexwerthe derselben Zerlegung, welcher 13 enthalten soll, muss daher auch 24 vorkommen. Die beiden Transpositionen 13, 24 können dann noch auf zwei verschiedene Arten zum Komplexe ergänzt werden, nämlich durch 57, 68 oder 58, 67. Durch zwei Komplexe $\begin{matrix}12&34&56&78\\13&24&57&68\end{matrix}$ sind aber die übrigen fünf bereits vollkommen bestimmt, wenn man jeden derselben in der nämlichen Weise aus den vorliegenden ableitet, wie den zweiten aus dem ersten. So muss zunächst der Komplex mit der Transposition 14 auch 23 enthalten, und von den 6 Transpositionen der Elemente 5, 6, 7, 8 sind nur noch die beiden 58, 67 für ihn vorhanden. Ein vierter Komplex mit 15 enthält auch 26, da im ersten Komplexe 12 und 56 auftreten; ferner 37 wegen 13 57 im zweiten Komplexe, also überhaupt 15 26 37 48. Und in ganz derselben Weise wird jeder der übrigen drei Komplexe durch eine seiner Transpositionen bestimmt, so dass sich schliesslich auf $15 \cdot 2 = 30$ Arten eine Zerlegung der Form ergiebt:

12 34 56 78	Diese Form zeigt aber, dass die beiden Komplexe, von denen ausgegangen wurde, in keiner Weise bevorzugt sind, dass vielmehr die Zerlegung durch beliebige zwei ihrer Komplexe gegeben wird. Und daraus folgt zugleich, dass dieselbe der Bedingung genügt, durch keine zwei Transpositionen eines ihrer
13 24 57 68	
14 23 58 67	
15 26 37 48	
16 25 38 47	
17 28 35 46	
18 27 36 45	

Komplexe geändert zu werden. Denn jedes derartige Transpositionenpaar lässt sogar drei Komplexe der Zerlegung ungeändert und also auch die ganze dadurch bestimmte Zerlegung. Durch eine einzelne Transposition bleibt derjenige Komplex der Zerlegung ungeändert, in dem sie selbst vorkommt, und in den übrigen Komplexen werden nur die beiden Transpositionen geändert, welche eines ihrer Elemente enthalten. Da nun Komplexe mit gemeinsamen Transpositionen nicht derselben Zerlegung angehören können, so ändert sich die Zerlegung bei jeder Transposition; und zwar erhält sie durch Transpositionen verschiedener Komplexe verschiedene Werthe, da jede Transposition nur durch ihren Komplex zugelassen wird. Transpositionen desselben Komplexes ändern dagegen die Zerlegung in der nämlichen Weise, da dieselbe das Produkt je zweier solcher Transpositionen zulassen soll. Die Zerlegung hat demnach, als Funktion betrachtet, wieder sich

selbst zur zugehörigen Zerlegung, so dass jeder ihr äquivalente Ausdruck das Beispiel einer Funktion von 30 Werthen bietet, welche die Bedingungen des vorliegenden Falles erfüllt. Einen solchen Ausdruck erhält man, ähnlich wie im Falle $n = 6$, indem man der Zerlegung gemäss:

$$\begin{aligned}
V_1 &= a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 + a_7a_8 \\
V_2 &= a_1a_3 + a_2a_4 + a_5a_7 + a_6a_8 \\
V_3 &= a_1a_4 + a_2a_3 + a_5a_8 + a_6a_7 \\
V_4 &= a_1a_5 + a_2a_6 + a_3a_7 + a_4a_8 \\
V_5 &= a_1a_6 + a_2a_5 + a_3a_8 + a_4a_7 \\
V_6 &= a_1a_7 + a_2a_8 + a_3a_5 + a_4a_6 \\
V_7 &= a_1a_8 + a_2a_7 + a_3a_6 + a_4a_5
\end{aligned}$$

setzt, und das Produkt $V_1V_2V_3V_4V_5V_6V_7 = \Pi_1^7 V_\lambda$ bildet.

[Ausgezeichnete Funktionen dieser Art lassen sich übrigens für $n > 8$, also ≥ 10, nicht mehr herstellen. Denn die Möglichkeit ihrer Herstellung in den Fällen 6 und 8 beruhte offenbar darauf, dass k genau $= \frac{n(n-1)}{2T} = n-1$ werden konnte. Für $n \geq 10$, $r_1 = 2$, $\rho_1 r_1 = n$ ist aber $\rho_1 > 4$, und folglich $k \leq \frac{n}{n}$, d. h. $= 1$.]

Vollzieht man in zwei Komplexen $\begin{matrix} 12\ 34\ 56\ 78 \\ 13\ 24\ 57\ 68 \end{matrix}$ irgend zwei Transpositionen des einen, so bleiben entweder beide ungeändert, oder der eine geht in den neuen Komplex 14 23 58 67 über. Als Komplexe einer Zerlegung aufgefasst, ziehen also die beiden Komplexe nothwendig diesen dritten nach sich, aber auch nur diesen. Tritt dagegen noch ein vierter Komplex aus der vorhin gegebenen Zerlegung hinzu, etwa 15 26 37 48, so ergeben sich auch die übrigen drei mit Nothwendigkeit. Denn man erhält z. B. aus 15 26 37 48

durch (12)(34): 25 16 47 38
durch (13)(24): 35 46 17 28
durch (14)(23): 45 36 27 18

Ist also k für die vorliegende Komplexform nicht $= 7$, so kann es nur $= 1$ oder $= 3$ sein. Durch $k = 1$ und $k = 3$ folgen aber aus $kv = 2.7.5.3.q$ selbst für $q = 1$ Werthe von v, welche die Grenze $n(n-1) = 56$ übersteigen ($v = 210$ für $k = 1$, und 70 für $k = 3$).

§ 7.

Ist für $\rho_1 r_1 = n$ $n > r_1 > 2$, so wird $k \leq \frac{n}{n-m}$, d. h. $= 1$, da $m = 0$ ist. Man hat dann einfach:

$$v = 2qt = 2q \frac{(n-1)\ldots(n-r_1+1)}{(r_1-1)!} \cdot \frac{(n-r_1-1)\ldots(n-2r_1+1)}{(r_1-1)!} \cdots$$

Für $r_1 = 3$ ist n durch 3 theilbar und $\geqq 6$. In diesem Falle wird $v = 2q \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$, also $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, wenn $n > 6$, d. h. $\geqq 9$ ist, weil dann schon $(n-4) > \frac{n}{3}$ wird. Ist dagegen $n = 6$, $r_1 = 3$, $\rho_1 = 2$, so ist $v = 2q \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ $= 20q$ und kann für $q = 1$ kleiner werden als $n(n-1) = 30$, nämlich $= 20 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Eine entsprechende Funktion von 20 Werthen erhält man nach einer früheren Bemerkung dadurch, dass man die Transpositionen des Komplexes, der hier die Form [1 2 3], [4 5 6] und $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 10$ Werthe hat, durch die Differenzen ihrer Elemente ersetzt und das Produkt dieser Differenzen bildet. Auf diese Weise ergiebt sich der Ausdruck:

$$(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)(a_4-a_5)(a_5-a_6)(a_6-a_4) = {}_1\Delta_3 \cdot {}_4\Delta_6,$$

unter ${}_{i+1}\Delta_{i+r}$ das alternirende Differenzenprodukt der r Elemente $a_{i+1}, a_{i+2} \ldots a_{i+r}$ verstanden.

Ist endlich $r_1 \geqq 4$, also $n \geqq 8$, so ist $v > \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ als Vielfaches von $\frac{2(n-1) \ldots (n-r_1+1)}{(r_1-1)!}$. Denn für $\frac{n}{2} \geqq r_1 \geqq 4$ ist $\frac{2(n-1) \ldots (n-r_1+1)}{(r_1-1)!} \geqq \frac{2(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ und $2(n-3) > n$.

§ 8.

b) Wenn für $m = 0$ $\rho_1 r_1$ nicht $\doteq n$ ist, so genügt k der Beziehung $k \leqq \frac{n}{n-m}$, wird also $= 1$, da $m = 0$ ist. Man hat daher wieder einfach $v = 2qt$.

Nun ist t, wie schon bemerkt, Vielfaches von $\frac{n \ldots (n-\rho_1 r_1+1)}{(\rho_1 r_1)!}$

$$\left(t = \frac{n!}{\Pi_1^{\sigma} \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}} = \frac{n \ldots (n-\rho_1 r_1+1)}{(\rho_1 r_1)!} \cdot \frac{(\rho_1 r_1)!}{\rho_1! (r_1)!^{\rho_1}} \cdot \frac{(n-\rho_1 r_1)!}{\Pi_2^{\sigma} \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}} \cdot \right)$$

Es wird somit v Vielfaches von $2\,\frac{n\,..\,(n-\rho_1 r_1+1)}{(\rho_1 r_1)!}$ und als solches $> n(n-1)$ und $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$, wenn $3 \leqq \rho_1 r_1 \leqq n-3$, also $n > 5$, ist, weil dann $2\,\frac{n\,..\,(n-\rho_1 r_1+1)}{(\rho_1 r_1)!} \geqq 2\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ und $\frac{n-2}{3} > 1$ wird.

Soll $\rho_1 r_1 < 3$ oder $> n-3$ sein, so kann es nur $= 2$ oder $= n-2$ sein. Denn r ist ja als Zahl der Elemente einer Transpositionsgruppe mindestens $= 2$, und aus $\rho_1 r_1 > n-2$ würde $\rho_2 r_2 < 2$, d. h. $r_2 < 2$ folgen, so lange $m = 0$ ist.

Der Fall $\rho_1 r_1 = 2$ lässt sich ausschliessen, wenn man unter $\rho_1 r_1$ die grösste der Zahlen ρr versteht. Da nämlich verschiedene r vorhanden sind, und $r \geqq 2$ ist, so muss wenigstens eine der Zahlen r, also auch ρr, grösser als 2 sein.

Es bleibt daher nur der Fall $\rho_1 r_1 = n-2$, in welchem $t = \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\,.\,\frac{(n-2)!}{\rho_1!\,(r_1!)^{\rho_1}}$, und $v\,(=2qt) = qn(n-1)\,.\,\frac{(n-2)!}{\rho_1!\,(r_1!)^{\rho_1}}$ wird. Als Zahl der Form $\frac{n!}{\rho!\,(r!)^{\rho}}$ $(\rho r = n)$ ist aber $\frac{(n-2)!}{\rho_1!\,(r_1!)^{\rho_1}}$ nach früheren Untersuchungen entweder $= 1$, oder mindestens $= n-3$, und dann ist $n-2 > 3$, d. h, $n > 5$. Im letzteren Falle wird $v \geqq qn(n-1)(n-3)$, also $> n(n-1)$ und $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$, da für $n > 5$ $n-3 > 1$ und $> \frac{n-2}{2\,.\,3}$ ist.

Gleich 1 wird $\frac{(n-2)!}{\rho_1!\,(r_1!)^{\rho_1}}$ für $\rho_1 = 1$, $r_1 = n-2$. Dann ist auch $q = 1$ als Theiler von $\rho_1! = 1$, und also $v = n(n-1)$. Der Komplex besteht in diesem Falle aus allen Transpositionen von $n-2$ Elementen und der Transposition der beiden übrigen, und dem entsprechend ist die Funktion in $n-2$ und den übrigen zwei Elementen zugleich alternirend. Eine $n(n-1)$ werthige Funktion dieser Art ergiebt sich wieder dadurch, dass man den Komplex durch das Differenzenprodukt $(a_1-a_2)\,.\,{}_3\Delta_n\,(={}_1\Delta_2\,.\,{}_3\Delta_n)$ ersetzt.

Damit ist der Hauptfall $m = 0$ erledigt.

§ 9.

Fehlen Elemente im Komplexe, ist also

2) m nicht $= 0$,

so ist zunächst n—m als Zahl der vorhandenen Elemente mindestens $= 2$, d. h. $m \leqq n-2$ und $n \geqq 3$. Ferner ist:

$t = \frac{n \,..\, (n-m+1)}{m!} \cdot \frac{(n-m)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}$, $\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n-m$, und k genügt der Ungleichung $k \leqq \frac{n}{n-m}$ mit möglicher Ausnahme der vier Fälle $r_1 = 2$, $\rho_1 r_1 = n-m$, $n-m = 2, 4, 6, 8$.

Nun wird für $m < \frac{n}{2} \frac{n}{n-m} < 2$, und folglich $k = 1$. Ist also zunächst $m < \frac{n}{2}$ so hat man, abgesehen von den erwähnten vier Fällen, einfach $v = 2qt = 2q \frac{n \,..\, (n-m+1)}{m!} \cdot \frac{(n-m)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}$.

Seinen kleinsten Werth 1 erlangt $\frac{(n-m)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}$ für $r_1 = n-m$, $\rho_1 = 1$. Dann wird $v = 2q \frac{n \,..\, (n-m+1)}{m!}$ und ist somit $> n(n-1)$ und $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, wenn $m > 2$ ist, da für $\frac{n}{2} > m > 2$, also $n > 6$, $2 \frac{n \,..\, (n-m+1)}{m!} \geqq 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ und $2 \frac{(n-2)}{2 \,.\, 3} > 1$ wird.

Für $m = 1$, $r_1 = n-1$, $\rho_1 = 1$ ist $q = 1$ als Theiler von $m! \rho_1 ! = 1$, und folglich $v = 2t = 2n$. Der Komplex besteht in diesem Falle aus allen Transpositionen von n—1 Elementen; die entsprechenden Funktionen sind also alternirend in n—1 Elementen. Als Beispiel einer solchen 2n werthigen Funktion erhält man in der bekannten Weise das Differenzenprodukt Δ_{n-1}.

Für $m = 2$, $r_1 = n-2$, $\rho_1 = 1$ kann man aus den fehlenden 2 Elementen eine Transposition bilden, welche das durch den Komplex transponirte Paar von Funktionswerthen in ein neues umwandelt, ohne den Komplex zu ändern. Als Zahl der verschiedenen Paare, welche durch denselben Komplex transponirt werden, ist also $q \geqq 2$, und da q zugleich Theiler von $m!\rho_1! = 2$ ist, so muss $q = 2$ sein. Folglich wird $v = 4t = \frac{4n(n-1)}{1.2} = 2n(n-1)$, und diese Zahl ist $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, so lange $\frac{n-2}{2.3} < 2$, d. h. $n < 14$ bleibt, dagegen $\leqq \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, wenn $n \geqq 14$ wird. Die entsprechenden Funktionen sind alternirend in $n-2$ und unsymmetrisch in den andern beiden Elementen, da der Komplex aus den $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Transpositionen von $n-2$ Elementen besteht. Beispiel einer solchen $2n(n-1)$werthigen Funktion ist $(a_1 + ba_2) . {}_3\Delta_n$.

Wenn nicht $= 1$, so ist $\frac{(n-m)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}} (\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n-m)$ mindestens $= \frac{(n-m-1)(n-m-2)}{1.2}$, wie an $\frac{n!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}} (\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n)$ früher (z. B. Theil I, § 7) ausführlich gezeigt worden ist. Es wird somit $v \geqq q \frac{n \ldots (n-m+1)}{m!} . (n-m-1)(n-m-2)$, und diese Grenze liegt für $n-m > 4$ höher als $n(n-1)$ und $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$. Denn für $m \geqq 3$, also $n > 7$, ist offenbar $v > \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$; für $m = 2$, also $n > 6$, ist $v \geqq \frac{n(n-1)}{1.2} . (n-3)(n-4)$, also $> n(n-1)$, weil $\frac{(n-3)(n-4)}{1.2} > 1$, und $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, weil schon $n-3 > \frac{n-2}{3}$ ist; und ist endlich $m = 1$, also $n > 5$, so wird $v \geqq n(n-2)(n-3)$, also

$> n(n-1)$, weil $(n-2)(n-3) > n-1$ ist, und $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, weil $n-3 > \frac{(n-1)}{2 \cdot 3}$ ist.

Für $n-m < 4$ ist $\frac{(n-m)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}$ nothwendig $= 1$, da $\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n-m$ sein soll; und $n-m = 4$ $(r_1 = 2, \rho_1 = 2)$ gehört zu den ausgenommenen Fällen.

§ 10.

Ist $m \geqq \frac{n}{2}$, also > 1, da $n > 2$ ist, so lässt sich aus den m fehlenden Elementen mindestens eine Transposition bilden, und es ist somit $q > 1$ zu setzen, wie in einem vorhergehenden Falle $(m = 2, r_1 = n-2, \rho_1 = 1)$ gezeigt wurde. Ferner ist $k \leqq \frac{n}{n-m}$, ausgenommen wieder die Fälle

$$r_1 = 2, \ \rho_1 r_1 = n-m, \ \rho_1 < 5.$$

Abgesehen davon wird also:

$$v \geqq 4 \frac{n-m}{n} \cdot \frac{n \,..\, (n-m+1)}{m!} \cdot \frac{(n-m)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}, \text{ oder wegen}$$

$$\frac{n \,..\, (n-m+1)}{m!} = \frac{n \,..\, (m+1)}{(n-m)!},$$

$$v \geqq 4 \frac{n-m}{n} \cdot \frac{n(n-1) \,..\, (m+1)}{(n-m)!} \cdot \frac{(n-m)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}, \text{ d. h.}$$

$$\geqq 4 \frac{(n-1) \,..\, (m+1)}{(n-m-1)!} \cdot \frac{(n-m)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}.$$

Dieser Ausdruck ist $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, sobald $n-m > 3$ ist, denn aus $m \geqq \frac{n}{2}$ folgt $n-m \leqq \frac{n}{2}$, und für $\frac{n}{2} \geqq n-m > 3$ (also $n \geqq 8$) wird $\frac{4(n-1) \,..\, (m+1)}{(n-m-1)!} \geqq \frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, also auch $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, da $4(n-3) > n$ ist.

Für $n-m = 3$, also $n \geqq 6$, kann der Komplex nur aus einer Transpositionsgruppe von drei Elementen bestehen, d. h. es muss $\frac{(n-m)!}{\Pi_1^{\sigma} \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}} = \frac{3!}{3!} = 1$ werden ($r_1 = 3$, $\rho_1 = 1$, $\sigma = 1$).

Aus $v \geqq 4 \frac{(n-1)\,..\,(m+1)}{(n-m-1)!} \cdot \frac{(n-m)!}{\Pi_1^{\sigma} \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}$ würde demnach die untere Grenze $v \geqq 2(n-1)(n-2)$ folgen, welche zwar über $n(n-1)$ und für $n < 12$ auch über $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ liegt ($\frac{n}{2 \,.\, 3} < 2$ für $n < 12$), aber für $n = 12$ von $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ erreicht und für $n > 12$ von dieser Zahl überstiegen wird. Es ist daher eine besondere Untersuchung nöthig. Zunächst ergiebt sich aus $kv = 2qt$, dass für $k = 1$ $v > \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ wird, da im vorliegenden Falle $t = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ ist. Sollen mehrere Komplexe der gegebenen Form in der Zerlegung auftreten [$k > 1$], so dürfen keine zwei derselben ein Element gemein haben. Hält man also in zwei solchen Komplexen [1 2 3] und [4 5 6] je ein Element fest, etwa 1 und 4, so hat die Zerlegung, also auch die Funktion, mindestens soviele verschiedene Werthe, als es Arten giebt, auf welche sich den Elementen 1 und 4 aus den übrigen $n-2$ zwei Paare (23, 56) zuordnen lassen. Eine solche Zuordnung ist aber offenbar auf $\frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{2}$ verschiedene Arten möglich, und folglich ist $v \geqq \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \,.\, 2}$. v liegt demnach für $n \geqq 12$ weit über der Grenze $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, da schon für $n > 7$: $\frac{(n-1)}{3} < \frac{n-3}{2}$, $\frac{n}{2} \leqq n-4$ und $2 < n-5$ ist, also $\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \,.\, 2} > \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$.

Was endlich den Fall $n-m = 2$ betrifft, in welchem der Komplex aus einer einzigen Transposition besteht, so gehört derselbe zu den Ausnahmefällen

$$\rho_1 r_1 = n-m,\ r_1 = 2,\ n-m = 2, 4, 6, 8,$$

welche jetzt noch zu erledigen bleiben.

§ 11.

In diesen Fällen ist für k zunächst nur die Ungleichung $k \leqq \frac{n(n-1)}{2T}$ zu benützen. Die Zahl T der Transpositionen des Komplexes ist hier $= \frac{n-m}{2}$, also $k \leqq \frac{n(n-1)}{n-m}$. Da ferner $t = \frac{n\,..\,(n-m+1)}{m!} \cdot \frac{(n-m)!}{\rho_1!(r_1!)^{\rho_1}} = \frac{n\,..\,(n-m+1)}{m!} \cdot (n-m-1)(n-m-3)\ldots 3.1$ ist, so folgt aus $kv = 2qt$:

$$v \geqq 2q \frac{n-m}{n(n-1)} \cdot \frac{n\,..\,(n-m+1)}{m!} \cdot (n-m-1)\ldots 3\,.\,1,$$

oder wegen $\frac{n\,..\,(n-m+1)}{m!} = \frac{n\,..\,(m+1)}{(n-m)!}$:

$$v \geqq 2q \frac{n\,..\,(m+1)}{(n-m-1)!} \cdot \frac{(n-m-1)(n-m-3)\,..\,3\,.\,1.}{n(n-1)}$$

Daraus ergiebt sich:

α) Für $n-m = 8$, also $m = n-8$:

$v \geqq 2q \frac{(n-2)\,..\,(n-7)}{7!} \,.\, 7\,.\,5\,.\,3$, d. h. $\geqq q \frac{(n-2)(n-3)\,..\,(n-7)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$,

eine untere Grenze, welche viel höher als $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ ist, da für $n > 8$ $n-3 > \frac{n}{2}$, $n-4 > \frac{n-1}{2}$, $n-5 \geqq 4$, $n-6 > 2$ und $n-7 \geqq 2$ wird.

β) Für $n-m = 6$, also $m = n-6$ (und $n > 6$):

$v \geqq 2q \,.\, \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5!} \,.\, 5.\,3$, d. h. $\geqq q \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4}$.

Von dem Ausdrucke $\frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{2}$ ist aber schon gezeigt (§ 10, n-m = 3), dass er die Grenze $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ übersteigt, wenn $n > 7$ ist. Mit möglicher Ausnahme des Falles $n = 7$, für den in der That $\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4} < \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ wird, ist also auch für $n-m = 6$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 3$: v grösser als $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$.

§ 12.

Im Falle $n = 7$ ist $t = 7 . 5 . 3$, also $kv = 2qt = 2 . 3 . 5 . 7 . q$. Daraus folgt zunächst, dass für $k < 5$ v die Zahl $n(n-1) = 42 = 2 . 3 . 7$ überschreitet, welche hier die Grenze bildet.

Der Komplex hat im vorliegenden Falle die Form: 12 34 56, und ein zweiter Werth desselben aus der nämlichen Zerlegung enthält entweder dieselben 6 Elemente oder an Stelle eines von ihnen das noch übrige siebente Element. Im ersten Falle ziehen die beiden Komplexwerthe drei andere aus den nämlichen 6 Elementen nach sich, wie für $n = 6$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 3$ auseinandergesetzt worden ist, und die so erhaltenen fünf Komplexe umfassen alle 15 Transpositionen ihrer 6 Elemente. Es bleiben daher nur noch die 6 Transpositionen des siebenten Elementes, welche keinen Komplex der gegebenen Form bilden können. Also $k = 5$, wenn > 1, und aus $5v = 2 . 3 . 5 . 7 . q$ folgt $v = 2 . 3 . 7 . q = 42q$, so dass sich für $q = 1$ Funktionen von $42 = n(n-1)$ Werthen ergeben würden. Und eine solche Funktion wird in der That durch jede 6werthige Ausnahmefunktion von 6 Elementen dargestellt, also etwa durch $\Pi_1^5 V_\lambda$ (§ 5), wenn man dieselbe als Funktion von 7 Elementen auffasst. Denn alsdann hat sie offenbar die gegebene Zerlegung, welche ja die Zerlegung der sechswerthigen Ausnahme-Funktionen als Theil enthält, und ausserdem 42 Werthe, da sich 6 Elemente aus 7 auf 7 verschiedene Arten herausnehmen lassen.

Wenn zweitens in keinem andern der Zerlegung angehörigen Komplexwerthe dieselben 6 Elemente auftreten, wie in 12 34 56, so muss ein zweiter Werth das noch übrige siebente Element enthalten, etwa an Stelle von 6. Und zwar könnte dann 7 entweder mit dem andern Elemente 5 der Transposition (56), oder mit einem der übrigen vier Elemente 1, 2, 3, 4 zu einer Transposition verbunden sein. Im letzteren Falle würden sich aber zwei Komplexe der Art $\begin{matrix} 12\ 34\ 56 \\ 13\ 25\ 47 \end{matrix}$ ergeben und durch Anwendung des dem ersten entnommenen Transpositionenpaares (12)(56) auf den zweiten der neue Komplex 23 16 47. Dieser müsste also in der nämlichen Zerlegung vorkommen, was unmöglich ist, da er mit 13 25 47 die Transposition (47) gemein hat. Es bleibt daher nur der erste Fall. Nun lässt sich ein zweiter Werth von 12 34 56 mit der Transposition (57) und ohne das Element 6, welcher derselben Zerlegung angehören soll, auf die beiden Arten 13 24 57 und 14 23 57 herstellen. Wählt man eine dieser Arten, etwa 13 24 57, so erhält man daraus durch das Transpositionenpaar (12)(56)

des ersten Komplexes den dritten Werth 14 23 67, und die Gesammtheit der drei Komplexe $\begin{pmatrix} 12\ 34\ 56 \\ 13\ 24\ 57 \\ 14\ 23\ 67 \end{pmatrix}$ ist nunmehr für jedes Transpositionenpaar eines von ihnen unveränderlich. k kann also $= 3$ sein, in welchem Falle aber v wegen $k < 5$ grösser als $n(n-1)$ wird. Jeder vierte Komplexwerth, der in derselben Weise aus den vorhergehenden abgeleitet werden soll, wie der zweite aus dem ersten, ist durch eine seiner Transpositionen eindeutig bestimmt und zieht nun seinerseits drei weitere Komplexwerthe nach sich, welche zusammen mit den ersten 4 alle 21 Transpositionen der 7 Elemente umfassen. So muss ein vierter Komplex neben der Transposition (15) auch (26) enthalten, wegen der Transpositionen 12, 56 des ersten Komplexes, und (37), weil im zweiten Komplexe (13) und (57) vorkommen. Und aus 15 26 37 folgt:

durch (12)(34) der 5te Komplex 25 16 47
durch (13)(24) der 6te Komplex 35 46 17 und
durch (14)(23) der 7te Komplex 45 36 27.

Es ergiebt sich also schliesslich eine aus 7 Komplexen bestehende Zerlegung der Form:

12 34 56	die ihrer Herstellung nach $15 \cdot 2 = 30$ verschiedene Werthe besitzt, da sie durch zwei ihrer Komplexe bestimmt ist, von denen der eine auf 15, der andere noch auf zwei verschiedene Arten gebildet werden kann. Fügt man zu jedem Komplexe die Transposition des fehlenden Elementes mit einem neuen Elemente 8, so erhält man die schon bekannte Zerlegung einer 30werthigen Funktion von 8 Elementen. Daraus folgt aber zugleich, dass die vorliegende Zerlegung nicht nur die nothwendige Eigenschaft besitzt, durch keine zwei Transpositionen eines ihrer Komplexe geändert zu werden, sondern auch sich selbst zur zugehörigen Zerlegung hat. Jede ihr äquivalente Funktion genügt demnach den hier gestellten Anforderungen, und eine solche Funktion, welche 30, also weniger als $n(n-1) = 42$, Werthe besitzt, erhält man in der alten Weise dadurch, dass man z. B.
13 24 57	
14 23 67	
15 26 37	
25 16 47	
35 46 17	
45 36 27	

$$V_1 = a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 \qquad V'_5 = a_2a_5 + a_1a_6 + a_4a_7$$
$$V_2 = a_1a_3 + a_2a_4 + a_5a_7 \qquad V'_6 = a_3a_5 + a_4a_6 + a_1a_7$$
$$V_3 = a_1a_4 + a_2a_3 + a_6a_7 \qquad V'_7 = a_4a_5 + a_3a_6 + a_2a_7$$
$$V_4 = a_1a_5 + a_2a_6 + a_3a_7$$

setzt und das Produkt $V'_1V'_2V'_3V'_4V'_5V'_6V'_7 = \Pi_1^7 V'_\lambda$ bildet.

Dass diese Funktion 30 Werthe hat, wird übrigens auch dadurch bestätigt, dass im vorliegenden Falle $k = 7$, also $7v = 2 . 3 . 5 . 7 . q$ ist, d. h. $v = 30q$.[2])

§ 13.

Ist

$\gamma)$ $n-m = 4$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 2$, also $m = n-4$ und $n > 4$,

so folgt aus $v \geqq 2q \frac{n \,..\, (m+1)}{(n-m-1)!} \frac{(n-m-1)(n-m-3)\,..\,3 . 1}{n(n-1)}$

als untere Grenze von v die Zahl $2q\frac{(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3} . 3 = q(n-2)(n-3)$,

welche für kleine q $< \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3}$ und $< n(n-1)$ wäre.

Es lässt sich indessen zeigen, dass q im Allgemeinen über einer gewissen Grenze bleibt. Man kann nämlich annehmen, dass ausser Komplexen der gegebenen Form 12, 34 höchstens noch solche in der Zerlegung auftreten, welche aus einer einzigen Transposition bestehen, da man andernfalls auf frühere Fälle zurückkäme. Nun wird ein durch den Komplex 12, 34 transponirtes Paar von Funktionswerthen f_1, f_2 durch eine Transposition der übrigen n—4 Elemente in ein neues Paar f_3 f_4 verwandelt, während der Komplex ungeändert bleibt; und zwar möge etwa f_1 in f_3, f_2 in f_4 übergehen. Eine zweite Transposition der n—4 Elemente liefert dann dasselbe Paar, wenn sie entweder ebenfalls f_1 in f_3, f_2 in f_4, oder wenn sie f_1 in f_4, f_2 in f_3 überführt. Nach der Annahme, die über die Zerlegung gemacht wurde, kann aber ein Funktionswerth f höchstens durch zwei Transpositionen den nämlichen andern Werth erhalten; folglich können höchstens vier Transpositionen das Paar f_1, f_2 in dasselbe neue Paar f_3, f_4 umwandeln, nämlich zwei f_1 in f_3, f_2 in f_4 und die andern beiden f_1 in f_4, f_2 in f_3. Da sich nun aus n—4 Elementen $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ Transpositionen bilden lassen, so ist die Zahl der verschiedenen Paare von Funktionswerthen, welche durch denselben Komplex 12, 34 transponirt werden, jedenfalls nicht kleiner als

$$1 + \frac{(n-4)(n-5)}{2 . 4} .$$

---

[2]) Eine andere Darstellungsweise 30werthiger Funktionen von 7 Elementen durch *Kronecker* findet sich in den Monatsberichten der Berliner Academie (1858, April 22).

Dieser Zahl ist aber q gleich, und es ist somit:

$$q \geqq 1 + \frac{(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4}.$$

Mit Benützung dieser Ungleichung ergiebt sich aus

$$v \geqq q(n-2)(n-3) \quad v \geqq \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4} + (n-2)(n-3),$$

eine untere Grenze, welche höher liegt als $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, sobald $n > 7$ wird. Die Annahme

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4} + (n-2)(n-3) > \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

liefert nämlich $3(n-3)\,[(n-4)(n-5) + 8] > 4\,n(n-1)$ und dies trifft für $n > 7$ in der That zu, weil dann $3(n-3) > 2(n-1)$ wird, und $n-5 > 2$, also $(n-4)(n-5) > 2n-8$ oder $(n-4)(n-5) + 8 > 2n$.

Ginge für $n = 7$ das Paar f_1 (12, 34) f_2 durch alle Transpositionen der übrigen drei Elemente in dasselbe neue Paar f_3, f_4 über, so müssten auch mindestens zwei dieser Transpositionen (67, 75, 56) f_1 in den nämlichen andern Werth (f_3 oder f_4) überführen, und Das widerspricht der Voraussetzung, die hinsichtlich der Zerlegung von f gemacht wurde, da zwei solche Transpositionen keinen Komplex der Form 12, 34 bilden können. f_1, f_2 wird also durch die drei Transpositionen 67, 75, 56 in mehr als ein anderes Paar verwandelt, während 12, 34 ungeändert bleibt, so dass mindestens drei verschiedene Paare durch diesen Komplex transponirt werden. Demnach ist $q \geqq 3$, und folglich $v \geqq 3(n-2)(n-3)$ d. h. $\geqq 60$, was die für $n = 7$ geltende Grenze $n(n-1) = 42$ weit übersteigt.

§ 14.

Es bleiben nun noch die Fälle $n = 5$ und $n = 6$.

Ist $n = 5$, so enthält die Zerlegung entweder keinen zweiten Komplex der Form 12, 34, in welchem das fehlende Element 5 aufträte, oder es ist ein solcher vorhanden.

Im ersten Falle kann man die verschiedenen Werthe der Zerlegung nach dem fehlenden Elemente in 5 Gruppen theilen, und dann entsprechen einer Gruppe alle diejenigen Funktionswerthe, welche man durch Substitutionen in den übrigen 4 Elementen erhält. Diese Werthe nimmt die Funktion an; auch wenn man sie nur als Funktion jener 4 Elemente betrachtet. Enthält aber die Zerlegung einer Funktion von vier Elementen einen Komplex der Form 12, 34, so hat die Funktion, wie früher (§ 5) gezeigt, mindestens 6 Werthe, voraus-

gesetzt natürlich, dass sie keine Transposition zulässt. Da somit jeder der 5 Zerlegungsgruppen wenigstens 6 Funktionswerthe entsprechen, so ist v in diesem Falle $\geqq 5 \cdot 6 = 30$, also $> n(n-1) = 20$.

Findet sich dagegen in der Zerlegung ein zweiter Komplex derselben Form wie 12, 34, aber mit dem Elemente 5, etwa 13, 45, so erhält man aus diesem durch das Transpositionenpaar (12)(34) des ersten Komplexes den dritten: 24, 35; daraus durch (13)(45) den vierten Komplex 25, 14, und aus diesem endlich durch (12)(34) den fünften 15, 23. Die so entstehenden fünf Komplexe

12 34
13 45
24 35
25 14
15 23

die zusammen alle 10 Transpositionen der 5 Elemente umfassen, werden also durch zwei von ihnen vollständig bestimmt und gehören nothwendig demselben Theile K der Zerlegung an, wie diese beiden. Demnach ist $k = 1$ oder $k = 5$. Da nun $t = n(n-2) = 15$ ist, so wird für $k = 1$: $v = 30q$, also $> n(n-1) = 20$. Ist dagegen $k = 5$, so folgt, weil q Theiler von $m!\rho_1! = 2$ ist, aus $kv = 2qt$: $v = 6$ oder $= 12$. Für beide Werthezahlen lassen sich Funktionen herstellen. Fügt man nämlich zu jedem Komplexe der Zerlegung die Transposition des fehlenden Elementes mit einem neuen Elemente 6, so ergiebt sich die bekannte 6werthige Zerlegung der 6- und 12werthigen Ausnahmefunktionen von 6 Elementen. Da nun die zugefügte Transposition durch die beiden vorhandenen eindeutig bestimmt ist, so ist offenbar die vorliegende Zerlegung ebenso wie die aus ihr abgeleitete 6werthig und hat sich selbst zur zugehörigen Zerlegung. 6- und 12werthige Funktionen, die den gegebenen Bedingungen genügen, wird man somit, wie für $n = 6$, dadurch erhalten, dass man z. B.

$V'_1 = a_1a_2 + a_3a_4$
$V'_2 = a_1a_3 + a_4a_5$
$V'_3 = a_2a_4 + a_3a_5$
$V'_4 = a_2a_5 + a_1a_4$
$V'_5 = a_1a_5 + a_2a_3$

setzt, und einerseits das Produkt

$$\Pi_1^5 V'_\lambda = V'_1V'_2V'_3V'_4V'_5,$$

andererseits das Differenzenprodukt

$$_1\Delta_5(V') = \Pi_1^5(V'_\varkappa - V'_\lambda) \text{ herstellt.}$$

Diese beiden Funktionen entspringen übrigens auch ohne Weiteres aus den entsprechenden des Falles $n = 6$, wenn man $a_6 = 0$ macht.[3])

[3]) So kann man auch aus den Beispielen, welche in der Anmerkung zu § 5 für 12werthige Ausnahmefunktionen von 6 Elementen gegeben wurden, entsprechende Darstellungen für solche von 5 Elementen ab-

Für $n = 5$ erreicht also v in der That die anfänglich gefundene untere Grenze $(n-2)(n-3) = 6$. $(v \geqq q(n-2)(n-3)$, d. h. $\geqq (n-2)(n-3))$.

Für $n = 6$, $m = 2$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 2$ wird $t = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot 3 = 5 \cdot 3 \cdot 3$. Ferner ist $q \geqq 2$, da $m > 1$ ist, und endlich $k \leqq \frac{n(n-1)}{n-m}$, d. h. $\leqq \frac{15}{2}$, also $\leqq 7$. $kv = 2qt = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5q$ zeigt nun zunächst, dass für $k \leqq 5$ $v \geqq 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot q \geqq 36$ wird, also die Grenze $n(n-1) = 30$ übersteigt. Andererseits kann k nicht $= 7$ werden, da q als Theiler von $m!\rho_1! = 4$ durch 7 nicht theilbar ist. Es bliebe daher nur $k = 6$, in welchem Falle $v = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{6} q = 15q$ wäre, also $= n(n-1) = 30$ werden könnte. Sechs Komplexe derselben Zerlegung von der Form 12, 34 umfassen aber 12 Transpositionen, so dass von den 15 Transpositionen der 6 Elemente nur noch drei übrig sind. Von diesen drei muss wenigstens eine für sich als Komplex auftreten, da die Zerlegung nur Komplexe von einer oder zwei Transpositionen enthalten soll.

Eine einzelne Transposition 12 hat nun, als Komplex betrachtet, $t' = \frac{n(n-1)}{2} = 15$ Werthe. Ferner können höchstens vier Transpositionen der übrigen vier Elemente ein durch 12 transponirtes Paar von Funktionswerthen $f_1(12)f_2$ in dasselbe neue Paar umwandeln, da nach Voraussetzung höchstens je zwei Transpositionen einen Funktionswerth in den nämlichen andern überführen. Fasst man also das Paar $f_1(12)f_2$ als Funktion der vier Elemente a_3, a_4, a_5, a_6 auf, so enthält die zugehörige Zerlegung mehr als einen Komplex, und folglich auch mehr als zwei; denn wie man sich leicht überzeugt, lassen sich die 6 Transpositionen von 4 Elementen nicht in zwei Komplexe bringen. Da nun $f_1(12)f_2$ durch jede, (12) durch keine Transposition der Elemente a_3, a_4, a_5, a_6 geändert wird, so werden mindestens 4 verschiedene Paare durch 12 transponirt, d. h. es ist $q' \geqq 4$.

Endlich ist k' im vorliegenden Falle $\leqq 3$; mithin folgt aus $k'v = 2q't' : v \geqq \frac{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3}{3} = 40$, also $> n(n-1) = 30$.

---

leiten, nämlich das Differenzenprodukt $(a_1a_2 - a_3a_4) \ldots \times \ldots (a_1a_5 - a_2a_3)$ und die *Mathieu*'sche Form $\varphi + \psi \cdot \sqrt{\Delta_5}$, wo nun φ und ψ 6werthige Funktionen der 5 Elemente sind.

§ 15.

Ist endlich

δ) $n-m=2$ ($r_1=2$, $\rho_1=1$), also $m=n-2$ und $n\geqq 3$,

so liefert $v \geqq 2q \frac{n\,..\,(m+1)}{(n-m-1)!} \frac{(n-m-1)(n-m-3)\,..}{n(n-1)}$ die untere Grenze $v \geqq 2q$. Es handelt sich daher wieder um nähere Bestimmung der Zahl q. Der Komplex besteht hier aus einer einzigen Transposition, und man kann annehmen, dass die Zerlegung überhaupt nur Komplexe dieser Art enthält, da man sonst auf frühere Fälle zurückgeführt würde. Die Zerlegung zerfällt dann in $\frac{n(n-1)}{2}$ einzelne Transpositionen, und die Funktion hat also mehr als $\frac{n(n-1)}{2}$ Werthe.

Nach der eben gemachten Voraussetzung kann nun ein durch 12 transponirtes Paar von Funktionswerthen f_1, f_2 höchstens durch je zwei Transpositionen der übrigen n—2 Elemente in das nämliche neue Paar $f_3(12)f_4$ verwandelt werden, indem etwa die eine dieser Transpositionen f_1 in f_3 und f_2 in f_4 überführt, die andere dagegen f_1 in f_4 und f_2 in f_3. Betrachtet man also das Paar $f_1(12)f_2$ als eine (in f_1 und f_2 symmetrische) Funktion der übrigen n—2 Elemente, als welche es keine Transposition zulässt, so enthält die zugehörige Zerlegung, welche kurz die Paar-Zerlegung heissen möge, entweder ebenfalls lauter einzelne Transpositionen, oder höchstens noch Komplexe von zwei Transpositionen, die also von der Form 34, 56 sind. Im letzteren Falle ist die Zahl q der verschiedenen Paare, welche durch denselben Komplex 12 transponirt werden, nach den Untersuchungen des vorigen Falles (n-m=4, $r_1=2$, $\rho_1=2$) (§ 13) grösser als $\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3}$, sobald $n-2>5$ ist. Durch $q>\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3}$ wird aber $v\,(\geqq 2q)>2\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3}$, und diese Grenze liegt für $n>10$ höher als $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$, da $n(n-1)=(n-3)(n-4)+6(n-2)$ ist, also $<2(n-3)(n-4)$, wenn $6(n-2)<(n-3)(n-4)$, d. h. $6(n-3)+6<(n-3)(n-4)$, d. h. $6<(n-3)(n-10)$ ist, was für $n>10$ offenbar zutrifft. — Hat die Paar-Zerlegung gleich der ursprünglichen zu Komplexen lauter einzelne Transpositionen, so lässt sich aus dem Umstande, dass von $n=11$ an

$2\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3} > \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ wird, wenigstens schliessen, dass für $n = n_1 > 10$ auch in diesem Falle v die Grenze $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ übersteigt, sobald Dies für $n = n_1 - 2$ erwiesen ist. Denn es ist dann $q \geqq \frac{(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1.2.3}$, und also $v \geqq 2\frac{(n_1-2)(n_1-3)(n_1-4)}{1.2.3}$.

Damit ist der Fall n auf den Fall n—2 zurückgeführt, und es genügt daher mit Rücksicht auf das Vorhergehende der Nachweis, dass für $n = 9$ und $n = 10$ $v > \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ ist, um darzuthun, das Dasselbe für alle $n > 10$ stattfindet.

Die Fälle $n = 9$ und $n = 10$ müssen demnach besonders untersucht werden, und ebenso natürlich die Fälle $n = 3$ bis $n = 8$.

§ 16.

Für $n = 3$ ist $v > 3$, da $v > \frac{n(n-1)}{2}$ und $\frac{n(n-1)}{2} = 3$ ist. Als Theiler von $n! = 1.2.3$ kann also v in diesem Falle nur $= n! = 6$ sein.

Auch für $n = 4$ hat v den höchstmöglichen Werth $n! = 24$. Denn die Gruppe einer Funktion, die durch alle Transpositionen geändert wird und durch keine zwei denselben Werth erhält, kann weder einzelne Transpositionen, noch Produkte von zweien enthalten. Es können also insbesondere keine Cyklen 3ter Ordnung und keine Substitutionen der Form (12)(34) in ihr auftreten. Von der letzteren Form ist aber die zweite Potenz eines jeden Cyklus vierter Ordnung, so dass auch ein solcher der Gruppe nicht angehören darf. Dieselbe enthält daher im vorliegenden Falle ($n = 4$) überhaupt keine andere Substitution als die identische 1, und es ist somit, wie behauptet,

$$v = \frac{n!}{1} = n! = 24.$$

Daraus folgt zugleich, dass für $n = 5$ $v \geqq 24$ ist, also $> n(n-1) = 20$, da die Funktion als solche von vier Elementen betrachtet unter den vorigen Fall gehört.

Für $n = 6$ zerfällt entweder eine der $\frac{n(n-1)}{2} = 15$ Paarzerlegungen von vier Elementen in lauter einzelne Transpositionen: dann ist (s. $n = 4$) $q \geqq 24$, also $= 24$, als Theiler

von $m!\rho_1! = (n-2)! = 24$, und aus $v \geqq 2q$ folgt $v \geqq 48$, d. h. $> n(n-1) = 30$. Oder es müsste jede Paarzerlegung auch Komplexe der Form 12, 34 enthalten. Tritt dann z. B. in der Zerlegung des Paares $f_1, (12) f_2$ der Komplex 34, 56 auf, so lässt die Substitution (34)(56) das Paar f_1, f_2 ungeändert, und da f durch keine zwei Transpositionen denselben Werth erhält, also kein Produkt zweier Transpositionen zulassen kann, so muss (34)(56) f_1 mit f_2 vertauschen. Dasselbe thut aber (12), und folglich wird f_1 durch die Substitution (12)(34)(56) nicht geändert. Geht man nun statt von (12) von (13) aus, so ergiebt sich eine ähnliche von f_1 zugelassene Substitution, welche die Transposition (13) als Faktor enthält. Diese zweite Substitution darf keine Transposition mit der ersten gemein haben. Denn das Produkt zweier Substitutionen der Art

(12)(34)(56)
(13)(24)(56)

ist eine Substitution, welche nur vier Elemente a_1, a_2, a_3, a_4 versetzt, und eine solche kann der Gruppe von f_1 nicht angehören, da f_1 als Funktion von irgend vier seiner Elemente 4! werthig ist (s. $n = 4$). Die neue Substitution kann daher nur eine der Formen (13)(25)(46) oder (13)(26)(45) haben, etwa die erste. Nun bleibt offenbar die Gruppe von f_1 ungeändert, wenn man in den Elementen ihrer Substitutionen irgend eine ihrer eigenen Substitutionen vollzieht, da f_1 durch eine solche nicht geändert wird, und die Zuordnung der Gruppe zum Funktionswerthe für beliebige Werthe der Elemente, also auch bei jeder Vertauschung derselben, bestehen bleibt. Führt man also die erste der beiden Substitutionen $\begin{matrix}(12)(34)(56)\\(13)(25)(46)\end{matrix}$ in der zweiten aus, so muss die entstehende Substitution (24)(16)(35) ebenfalls der Gruppe von f_1 angehören. Nach Abzug der neun Transpositionen von

(12)(34)(56)
(13)(25)(46)
(24)(16)(35)

bleiben aber von den 15 Transpositionen der 6 Elemente nur noch die sechs: $\begin{matrix}14\ 23\ 36\\15\ 26\ 45\end{matrix}$ und aus diesen lässt sich augenscheinlich keine weitere Substitution der Form (12)(34)(56) zusammensetzen, während doch nach der Annahme jede von ihnen in einer Substitution auftreten müsste, welche mit den ersten drei keine Transposition gemein hätte und von der nämlichen Form wäre. Die Annahme, dass in jeder Paarzerlegung Komplexe der Form 12, 34 vorkämen, ist demnach unzulässig, so dass für $n = 6$ jedenfalls $v \geqq 48$ ist, also $> n(n-1) = 30$.

Und da für $n = 7$ die Funktion als solche von 6 ihrer

Elemente mindestens 48 Werthe besitzt, so ist auch in diesem Falle $v \geqq 48$, und also $> n(n-1) = 42$.

Enthält für $n = 8$ die Paarzerlegung, welche sich auf $n-2 = 6$ Elemente bezieht, Komplexe der Form 12, 34, so hat nach der Untersuchung (§ 14) des Falles $n-m = 4$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 2$, $n = 6$ das Paar als Funktion jener 6 Elemente wenigstens 36 verschiedene Werthe. Dann ist also $q \geqq 36$, und folglich $v\ (\geqq 2q) \geqq 72$, also $> n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$.

Ist die Paarzerlegung von derselben Art wie die ursprüngliche, so wird $q \geqq 48$ (s. $n = 6$), und $v \geqq 96$. v ist daher für $n = 8$ stets $> n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Sind ferner für $n = 9$ die Komplexe der Paarzerlegung dargestellt durch die einzelnen 21 Transpositionen von $n-2 = 7$ Elementen, so ist $q \geqq 48$, also $v \geqq 96 > \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ $= 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$. Und wenn Komplexe der Form 12, 34 auftreten, so ist nach dem (§ 13) für $n-m = 4$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 2$, $n = 7$ Gefundenen $q \geqq 60$, also $v \geqq 120$, d. h. ebenfalls $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$.

Ist endlich $n = 10$, so ist entweder $q \geqq 72$ (s. $n = 8$), also $v \geqq 144$, wenn die auf $n-2 = 8$ Elemente bezügliche Paarzerlegung lauter einzelne Transpositionen zu Komplexen hat, oder die Paarzerlegung enthält auch Komplexe der Form 12, 34, und dann ist nach den Ergebnissen des Falles $n-m=4$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 2$ (§ 13):

$$q \geqq \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{2 \cdot 4} + (n-4)(n-5), \text{ d. h. } \geqq 75,$$

und folglich

$v\ (\geqq 2q) \geqq 150$. Jedenfalls ist daher auch für $n = 10$:

$$v > \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Ist aber für $n = 9$ und $n = 10$ $v > \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, so ist Dies nach dem Vorhergehenden auch für alle $n > 10$ der Fall, so dass überhaupt für $n-m = 2$, ($r_1 = 2$, $\rho_1 = 1$) die gesetzten Grenzen $n(n-1)$ und $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ von v überschritten werden, abgesehen natürlich vom Falle $n = 3$, in welchem $6 = n(n-1)$ mit der höchstmöglichen Werthezahl $n! = v$ zusammenfällt.

§ 17.

Für Funktionen, welche keine Transposition zulassen, sind nunmehr alle möglichen Fälle erledigt.

Fasst man die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen zusammen, so ergiebt sich der Satz:

Eine Funktion von n Elementen, welche keine Transposition zulässt, ist entweder:

1) zweiwerthig (alternirend); Beispiel: $_1\Delta_n$;

oder

2) 2n werthig, und dann ist sie alternirend in n—1 Elementen; Beispiel: $_1\Delta_{n-1}$;

oder

3) n(n—1) werthig, wenn sie in n—2 und den übrigen 2 Elementen zugleich alternirend ist; Beispiel: $(a_1 - a_2 a_3) \Delta_n$;

oder

4) 2n(n—1) werthig, wenn sie nur alternirend in n—2 Elementen ist; Beispiel: $(a_1 + ba_2)_3\Delta_n$;

oder endlich die Funktion hat mehr als $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Werthe.

Für $n < 14$ ist $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} < 2n(n-1)$, der vierte Fall des Satzes also wegzulassen.

Und ist $n < 8$, so wird $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ auch $< n(n-1)$ und ist im obigen Satze durch diese letztere Grenze zu ersetzen.

Für $n = 3$ fällt schon $2n\ (= n(n-1))$ mit der höchsten zulässigen Werthezahl $n! = 6$ zusammen; eine Funktion von 3 Elementen, welche keine Transposition zulässt, ist also entweder alternirend oder $n! = 6$ werthig.

Und eine Funktion von zwei Elementen, welche durch die einzige Transposition derselben geändert wird, hat natürlich zwei Werthe, d. h. so viele, als überhaupt möglich sind.

Sonst gilt für $n > 8$ der ausgesprochene Satz ohne jede Ausnahme. Dagegen giebt es

für $n = 4$: Funktionen von $6 = \frac{n(n-1)}{2}$, also mehr als 2 und weniger als $2n = 8$ Werthen;

für $n = 5$: Funktionen von 6, also mehr als zwei und weniger als $2n = 10$ Werthen, und solche von 12, d. h. mehr als $2n = 10$ und weniger als $n(n-1) = 20$ Werthen;

für $n = 6$: Funktionen von $n = 6$ Werthen; ferner solche, welche $12 = 2n$ Werthe haben, ohne in $n-1 = 5$ Elementen alternirend zu sein; ferner Funktionen von 20, also mehr als $2n = 12$ und weniger als $n(n-1) = 30$ Werthen; endlich solche 30werthige Funktionen, die nicht in $n-2$ und 2 Elementen alternirend sind;

für $n = 7$: Funktionen von 30, also mehr als $2n = 14$ und weniger als $n(n-1) = 42$ Werthen, und solche von $42 = n(n-1)$ Werthen, welche nicht in $n-2$ und 2 Elementen alternirend sind;

für $n = 8$: Funktionen, welche 30, also mehr als $2n = 16$ und weniger als $n(n-1) = 56$ Werthe besitzen.

Als Beispiele dieser Ausnahmefunktionen ergaben sich:

für $n = 4$: die 6werthige Funktion: $(a_1-a_2)(a_3-a_4)$;

für $n = 5$: aus

$$V'_1 = a_1a_2 + a_3a_4$$
$$V'_2 = a_1a_3 + a_4a_5$$
$$V'_3 = a_2a_4 + a_3a_5$$
$$V'_4 = a_2a_5 + a_1a_4$$
$$V'_5 = a_1a_5 + a_2a_3$$

das sechswerthige Produkt $\Pi_1^5 V'_\lambda$ und das zwölfwerthige Differenzenprodukt

$$\Pi_1^5(V'_\varkappa - V'_\lambda) = {}_1\Delta_5(V');$$

für $n = 6$: aus

$$V_1 = a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6$$
$$V_2 = a_1a_3 + a_4a_5 + a_2a_6$$
$$V_3 = a_2a_4 + a_3a_5 + a_1a_6$$
$$V_4 = a_2a_5 + a_1a_4 + a_3a_6$$
$$V_5 = a_1a_5 + a_2a_3 + a_4a_6$$

das sechswerthige Produkt $\Pi_1^5 V_\lambda$ und das zwölfwerthige Differenzenprodukt

$$\Pi_1^5(V_\varkappa - V_\lambda) = {}_1\Delta_5(V);$$

ferner die 20werthige Funktion:

$$(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)\,.\,(a_4-a_5)(a_5-a_6)(a_6-a_4) = {}_1\Delta_3 \cdot {}_4\Delta_6;$$

endlich die 30werthige: $(a_1-a_2)(a_3-a_4)(a_5-a_6)$;

für $n=7$: aus

$$V'_1 = a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6$$
$$V'_2 = a_1a_3 + a_2a_4 + a_5a_7$$
$$V'_3 = a_1a_4 + a_2a_3 + a_6a_7$$
$$V'_4 = a_1a_5 + a_2a_6 + a_3a_7$$
$$V'_5 = a_2a_5 + a_1a_6 + a_4a_7$$
$$V'_6 = a_3a_5 + a_4a_6 + a_1a_7$$
$$V'_7 = a_4a_5 + a_3a_6 + a_2a_7$$

das 30werthige Produkt $\Pi_1^7 V'_\lambda$, und aus den für $n=6$ gegebenen Ausdrücken V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 das 42werthige Produkt $\Pi_1^5 V_\lambda$;

für $n = 8$: aus

$$V_1 = a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6 + a_7a_8$$
$$V_2 = a_1a_3 + a_2a_4 + a_5a_7 + a_6a_8$$
$$V_3 = a_1a_4 + a_2a_3 + a_6a_7 + a_5a_8$$
$$V_4 = a_1a_5 + a_2a_6 + a_3a_7 + a_4a_8$$
$$V_5 = a_2a_5 + a_1a_6 + a_4a_7 + a_3a_8$$
$$V_6 = a_3a_5 + a_4a_6 + a_1a_7 + a_2a_8$$
$$V_7 = a_4a_5 + a_3a_6 + a_2a_7 + a_1a_8$$

das 30werthige Produkt $\Pi_1^7 V_\lambda$.

Zweiter Abschnitt.

§ 18.

Viel einfacher, als für Funktionen, welche durch jede Transposition geändert werden, gestaltet sich die Untersuchung für:

Funktionen, welche Transpositionen zulassen.

Denn die Werthezahl solcher Funktionen ist ja geradezu Vielfaches von der Werthezahl t des Komplexes der zugelassenen Transpositionen, vermöge der Beziehung:

$$v = qt = q\frac{n!}{m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!\,(r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}, \quad \text{worin } \sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n-m,$$

$m! = 1$, für $m = 0$ und q Theiler von $m!\,\Pi_1^\sigma \rho_\lambda!$ ist.

Ueberschreitet also t die gewählten Grenzen, so gilt das Gleiche ohne Weiteres auch von v.

Funktionen, welche Transpositionen zulassen, sind dadurch ausgezeichnet, dass sie in Gruppen ihrer Elemente symmetrisch sind. Da nämlich jede Transpositionsgruppe des zugelassenen Komplexes alle Transpositionen ihrer Elemente enthält, so wird die Funktion durch keine Transposition dieser Elemente geändert, also überhaupt durch keine Vertauschung derselben. Die Funktion ist somit symmetrisch in den Elementen einer jeden Transpositionsgruppe des zugelassenen Komplexes.

Um Beispiele solcher Funktionen zu erhalten, hat man demnach jede dieser Transpositionsgruppen durch eine symmetrische Verbindung ihrer Elemente zu ersetzen, die entstehenden Ausdrücke so zu vereinigen, dass nicht Elemente verschiedener Gruppen symmetrisch auftreten, und eine Funktion der im Komplexe fehlenden Elemente hinzuzufügen, welche keine Transposition derselben zulässt.

§ 19.

Ist nun

$$1)\ m = 0,$$

so wird $t = \frac{n!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}$, und darin $\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n$.

Den kleinsten Werth 1 erlangt $\frac{n!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}$ für $\sigma = 1$, $\rho_1 = 1$, $r_1 = n$. Dann ist auch $q = 1$ als Theiler von $m! \Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! = \rho_1 ! = 1$, und also $v\ (= qt) = 1$, d. h. die Funktion ist in diesem Falle symmetrisch (einwerthig). In der That besteht auch der zugelassene Komplex für $r_1 = n$ aus allen $\frac{n(n-1)}{2}$ Transpositionen der n Elemente.

Ist r_1 nicht $= n$, aber $\rho_1 r_1 = n$, so wird

$$t = \frac{n!}{\rho_1 ! (r_1 !)^{\rho_1}}$$

$$= \frac{(n-1)\,..\,(n-r_1+1)}{(r_1-1)!} \cdot \frac{n-r_1-1)\,..\,(n-2r_1+1)}{(r_1-1)!} \cdot ..,$$

also Vielfaches von $\frac{(n-1)\,..\,(n-r_1+1)}{(r_1-1)!}$. Dabei ist r_1 als Theiler von n höchstens $= \frac{n}{2}$.

Für $r_1 > 4$, also $n \geqq 10$, ist nun $\frac{(n-1)\,..\,(n-r_1+1)}{(r_1-1)!}$

$\geqq \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4}$ und folglich $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, weil von $n = 10$ an $\frac{n-3}{2} > \frac{n}{3}$ und $\frac{n-4}{2} \geqq 3$ wird, also $\frac{(n-3)(n-4)}{4} > n$. Es übersteigt daher für $r_1 > 4$, $\rho_1 r_1 = n$ t schon als Vielfaches von $\frac{(n-1)\,..\,(n-r_1+1)}{(r_1-1)!}$ die Grenze $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ (mithin auch $v = qt$).

Ist $r_1 = 2$, $\rho_1 r_1 = n$, also n gerade und $\geqq 4$, so wird $t = (n-1)(n-3) \ldots 3 \cdot 1$, und ist somit $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, wenn $n > 6$, d. h. $\geqq 8$ ist, weil dann $n-3 > \frac{n}{2}$ und $n-5 > \frac{n-2}{3}$ wird. Dagegen wird für $n < 8$, also $= 4$ oder $= 6$, $(n-1)(n-3) \ldots 3 \cdot 1$ kleiner als die dann gültige Grenze $n(n-1)$. Die Fälle $n = 4$ und $n = 6$ bedürfen daher einer besonderen Untersuchung.

Für $n = 4$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 2$ ist $t = n-1 = 3 = \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$, q Theiler von $\rho_1! = 2$, und folglich $v = 3 < n$, oder $= 6 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$. Der Komplex hat die Form 12, 34. Als Beispiele erhält man demnach die 6werthige Funktion $a_1a_2 + ba_3a_4$, und daraus durch $b = 1$ die dreiwerthige $a_1a_2 + a_3a_4$.

Für $n = 6$, $r_1 = 2$, $\rho_1 = 3$ ist $t = (n-1)(n-3) = 15$, q Theiler von $\rho_1! = 3! = 6$; es liegt also v erst für $q > 2$ über der Grenze $n(n-1) = 30$, während für $q = 1$ $v = 15 = \frac{n(n-1)}{2}$, und für $q = 2$ $v = 30 = n(n-1)$ wird. Form des Komplexes ist 12, 34, 56. Beispiele ergeben sich, wenn man aus den drei Produkten a_1a_2, a_3a_4, a_5a_6 einerseits die Summe $a_1a_2 + a_3a_4 + a_5a_6$ und andererseits das Differenzenprodukt $(a_1a_2 - a_3a_4)(a_3a_4 - a_5a_6)(a_5a_6 - a_1a_2)$ herstellt. Denn die Summe ist eine dem Komplexe äquivalente 15werthige Funktion, und jedem ihrer Werthe entsprechen zwei (entgegengesetzte) Werthe des Differenzenproduktes, so dass letzteres 30 Werthe besitzt, während es offenbar denselben Komplex zulässt. (a_1a_2, a_3a_4, a_5a_6 lassen sich wie einzelne Elemente vertauschen.)

Ist weiter $r_1 = 3$, $\rho_1 r_1 = n$, also n durch 3 theilbar und $\geqq 6$, so wird $t = \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2} \ldots$, also $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, wenn $n > 6$, d. h. $\geqq 9$ ist, weil dann $n-4 > \frac{n}{3}$ und $\frac{n-5}{2} > 1$ wird.

Dagegen ist für $n = 6$, $r_1 = 3$, $\rho_1 = 2$ $t = \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} = 10$,

also $< n(n-1) = 30$. q ist in diesem Falle Theiler von $\rho_1! = 2$, so dass aus $v = qt$: $v = 10$ oder $= 20$ folgt. Der Komplex hat die Form [1 2 3], [4 5 6], wenn $[i_1 i_2 \ldots i_r]$ wieder kurz die Transpositionsgruppe der Elemente $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots a_{i_r}$ bezeichnet. Beispiele sind demgemäss: die 20werthige Funktion $a_1 a_2 a_3 + b a_4 a_5 a_6$ und (für $b = 1$) die zehnwerthige $a_1 a_2 a_3 + a_4 a_5 a_6$.

Ist endlich $r_1 = 4$, $\rho_1 r_1 = n$, also n durch 4 theilbar und $\geqq 8$, so wird $t = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} \cdot \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3} \ldots$, also $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, wenn $n > 8$ ist, weil dann $\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3} > 2$ und $n-3 > \frac{n}{2}$ ist. Nur für $n = 8$ ist $t < \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ $(= 56 = n(n\text{-}1)$, nämlich $= \frac{(n\text{-}1)(n\text{-}2)(n\text{-}3)}{1.2.3}$ $= 35$, so dass in diesem Falle für $q = 1$ auch $v = 35 < \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ wird. Eine der gegebenen Komplexform [1 2 3 4], [5 6 7 8] äquivalente 35werthige Funktion von acht Elementen ist z. B. $a_1 a_2 a_3 a_4 + a_5 a_6 a_7 a_8$.

§ 20.

Ist für $m = 0$ $\rho_1 r_1$ nicht $= n$, so wird

$$t = \frac{n \ldots (n-\rho_1 r_1+1)}{\rho_1 ! (r_1 !)^{\rho_1}} \cdot \frac{(n-\rho_1 r_1)!}{\Pi_2^{\sigma} \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}$$

$$= \frac{n \ldots (n-\rho_1 r_1 + 1)}{(\rho_1 r_1 !)} \cdot \frac{(\rho_1 r_1)!}{\rho_1 ! (r_1) !^{\rho_1}} \cdot \frac{(n-\rho_1 r_1)!}{(\Pi_2^{\sigma} \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}},$$

also Vielfaches von $\frac{n \ldots (n-\rho_1 r_1 + 1)}{(\rho_1 r_1)!} = \frac{n \ldots (\rho_1 r_1 + 1)}{(n-\rho_1 r_1)!}$.

Schon in dieser Eigenschaft wird daher $t > \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, wenn $3 < \rho_1 r_1 < n-3$ ist (also $n \geqq 8$). Versteht man unter $\rho_1 r_1$ wie früher die grösste der Zahlen ρr, so ist $\rho_1 r_1 > 2$; ausserdem ist für $m = 0$ $\rho_1 r_1$ höchstens $= n-2$. Ist also nicht $3 < \rho_1 r_1 < n-3$, so kann $\rho_1 r_1$ nur eine der Zahlen 3, n—3, n—2 sein.

Für $\rho_1 r_1 = n-2$, also $n > 4$, muss $\rho_2 = 1$, $r_2 = 2$ werden, also $t = \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{(n-2)!}{\rho_1!(r_1!)^{\rho_1}}$. Es ist aber nach dem für $\frac{n!}{\rho_1!(r_1!)^{\rho_1}}$ Gefundenen (§ 19) $\frac{(n-2)!}{\rho_1!(r_1!)^{\rho_1}}$ entweder $= 1$, oder mindestens $= \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}$, und dann ist $n-2 > 3$, d. h. $n > 5$. Im zweiten Falle wird $t \geqq \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2}$ übersteigt also die Grenzen $n(n-1)$ und $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, da für $n > 5$ $\frac{n-4}{2} \geqq 1$, und $n-3 > 2$ und $> \frac{n}{3}$ ist.

Gleich 1 wird $\frac{(n-2)!}{\rho_1!(r_1!)^{\rho_1}}$ für $r_1 = n-2$, $\rho_1 = 1$. Dann ist $t = \frac{n(n-1)}{1.2}$, $q = 1$ als Theiler von $\rho_1! = 1$, und folglich auch $v\,(= qt) = \frac{n(n-1)}{1.2}$.

Die entsprechenden Funktionen sind symmetrisch in $n-2$ ihrer Elemente und ebenso in den beiden übrigen, da der zugelassene Komplex aus allen Transpositionen von $n-2$ Elementen und der Transposition der übrigen zwei besteht. Beispiel einer solchen $\frac{n(n-1)}{2}$werthigen Funktion ist $a_1 + a_2$.

Für $\rho_1 r_1 = 3$ müsste $\sigma = 1$, $\rho_2 r_2 = 2$, also $n = 5$ werden, da $\rho_1 r_1$ die grösste der Zahlen ρr sein soll, und $r \geqq 2$ ist. Denn aus $\rho_2 r_2 = 3 = \rho_1 r_1$ würde $r_2 = r_1\,(= 3)$ und aus $\rho_2 r_2 = 2 = \rho_3 r_3$ $r_2 = r_3\,(= 2)$ folgen. Für $n = 5$ ist aber $3 = n-2$, so dass man auf den eben behandelten Fall $\rho_1 r_1 = n-2$ zurückkommt.

Ist endlich $\rho_1 r_1 = n-3$ und > 3, also $n > 6$, so kann nur $\rho_2 = 1$, $r_2 = 3$ sein. Dann wird $t = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{(n-3)!}{\rho_1!(r_1!)^{\rho_1}}$, ist also $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ und, wegen $\frac{n-2}{3} > 1$, auch $> n(n-1)$, wenn nicht $\frac{(n-3)!}{\rho_1!(r_1!)^{\rho_1}} = 1$, d. h. $r_1 = n-3$, $\rho_1 = 1$, ist.

Wird $r_1 = n-3$, $\rho_1 = 1$, also $t = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, so ist $q = 1$ als Theiler von $\rho_1! = 1$, und folglich auch $v = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

Der Komplex besteht in diesem Falle aus zwei Transpositionsgruppen von n—3 und 3 Elementen, und dem entsprechend ist die Funktion symmetrisch in n—3 ihrer Elemente und ebenso in den übrigen drei. Eine solche $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$werthige Funktion ist z. B. $a_1 + a_2 + a_3$.

§ 21.

Ist

2) m nicht $= 0$,

so ist $m \leqq n-2$, da n—m als Zahl der Elemente im Komplexe mindestens $= 2$ ist. Dann wird:

$t = \frac{n \,..\, (n-m+1)}{m!} \cdot \frac{(n-m)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$ $(\sum_1^\sigma \rho_\lambda r_\lambda = n-m)$, also

Vielfaches von $\frac{n \,..\, (n-m+1)}{m!} = \frac{n \,..\, (m+1)}{(n-m)!}$. Als solches ist aber $t > \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, sobald $3 < m < n-3$ ist (also $n > 7$). Besonders zu untersuchen sind daher nur die Fälle:

$m = 1, = 2, = n-2, = 3, = n-3.$

Für $m = 1$, also $n \geqq 3$, ist $t = n \cdot \frac{(n-1)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$und wird

$= n$, wenn $\frac{(n-1)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}} = 1$ wird, was für $\rho_1 = 1$, $r_1 = n-1$ eintritt. Dann ist auch $v = n$, da $q = 1$ ist als Theiler von $m! \rho_1! = 1$. Die entsprechenden Funktionen sind symmetrisch in n—1 Elementen, deren sämmtliche Transpositionen in diesem Falle den zugelassenen Komplex bilden. Einfachstes Beispiel ist die nwerthige Funktion a_1.

Wenn nicht $= 1$, so ist $\frac{(n-1)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$ nach Dem, was im Falle $m = 0$ für $\frac{n!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda! (r_\lambda!)^{\rho_\lambda}}$ gefunden wurde, mindestens

$= \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}$, und dann ist $n-1 > 3$, also $n > 4$. Danach wird $t \geqq \frac{n(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}$. Nun ist für $n > 5$: $\frac{n-2}{2} \geqq 2$ und $n-3 > \frac{n-1}{2}$, also $\frac{n(n-2)(n-3)}{2} > n(n-1)$, ferner $n-3 > \frac{n-1}{3}$, also $\frac{n(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}$ auch $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Mithin übersteigt t (und ebenso $v = qt$) im vorliegenden Falle die Grenzen $n(n-1)$ und $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, sobald $n > 5$ ist.

Für $n = 5$, $m = 1$, $r_1 < 4$ kann nur $r_1 = 2$, $\rho_1 = 2$ sein also $t = n(n-2) = 15 < n(n-1) = 20$. Es wird daher für $q = 1$ auch $v < n(n-1)$, nämlich $= 15$, und eine entsprechende 15werthige Funktion ist z. B. der Ausdruck $a_1 a_2 + a_3 a_4$, welcher der gegebenen Komplexform 12, 34 äquivalent ist.

Für $m = 2$, also $n \geqq 4$, ist $t = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(n-2)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}}$

und wird $= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$, wenn $\frac{(n-2)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}} = 1$ ist, also $r_1 = n-2$, $\rho_1 = 1$.

In diesem Falle ist q Theiler von $m! \rho_1 ! = 2$, und zwar $= 2$, als Zahl der Funktionswerthe, welche denselben Komplex zulassen. Denn die Transposition der beiden fehlenden Elemente ändert offenbar den Funktionswerth, ohne den Komplex zu ändern, der hier aus allen Transpositionen von $n-2$ Elementen besteht. Demnach ist $v = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$.

Die entsprechenden Funktionen sind symmetrisch in $n-2$, unsymmetrisch in den andern beiden Elementen; Beispiel ist $a_1 + ba_2$.

Wenn nicht $= 1$, so ist $\frac{(n-2)!}{\Pi_1^\sigma \rho_\lambda ! (r_\lambda !)^{\rho_\lambda}} \geqq \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2}$, und $n-2 > 3$, d. h. $n > 5$. Dann wird $t \geqq \frac{n(n-1)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 2}$

also $> n(n-1)$ und $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, da für $n > 5$ $\frac{(n-3)}{2} \cdot \frac{(n-4)}{2} > 1$ und $\frac{n-3}{2} > \frac{n-2}{3}$ ist.

Ist $m = n-2$ und > 2, also $n > 4$, so beschränkt sich der Komplex auf eine einzige Transposition, und seine Werthezahl t ist $\frac{n(n-1)}{1.2}$. Die Zahl q der verschiedenen Funktionswerthe, welche dieselbe Transposition zulassen, d. h. die nämlichen zwei Elemente symmetrisch enthalten, ist offenbar einerlei mit der Zahl der Werthe, welche die Funktion als solche der übrigen $n-2$ Elemente annimmt. Als Funktion dieser $n-2$ Elemente betrachtet gehört sie aber zu denen, welche keine Transposition zulassen, und hat, wie früher gezeigt, entweder 2 oder mindestens $n-2$ Werthe (für $n-2=6$).

Durch $q \geqq n-2$ wird $v \geqq \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$, liegt also über den Grenzen $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ und $n(n-1)$, da $n-2 > 2$ sein soll.

Dagegen wird $v = 2\frac{n(n-1)}{1.2} = n(n-1)$, wenn $q = 2$, die Funktion also symmetrisch in zwei und alternirend in den andern $n-2$ Elementen ist. Eine solche $n(n-1)$ werthige Funktion ist ${}_1\Delta_{n-2}$.

Für $m = 3$ und $< n-2$, also $n > 5$, wird t Vielfaches von $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, und q mindestens $= 2$, da $m > 1$ ist, und jede Transposition der fehlenden Elemente den Funktionswerth ändert, ohne den Komplex zu ändern. Es ist daher $v \geqq 2\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, also offenbar $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ und auch $> n(n-1)$, weil für $n > 5$ $\frac{n-2}{3} > 1$ ist.

Ist endlich $m = n-3$ und > 3, also $n > 6$, so kann der Komplex nur aus den drei Transpositionen von drei Elementen bestehen, und hat also $t = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{3!}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Werthe. q ist wieder $\geqq 2$, da $m > 1$ ist, und folglich wird $v \geqq 2\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, also $> \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ und, wegen $\frac{n-2}{3} > 1$, $> n(n-1)$.

§ 22.

Damit sind alle Möglichkeiten erschöpft, die für Funktionen eintreten können, welche Transpositionen zulassen.

Die Ergebnisse der Untersuchung sind folgende:

Eine Funktion von n Elementen, welche Transpositionen zulässt, ist entweder

1) einwerthig (symmetrisch); oder
2) n werthig, und dann ist sie symmetrisch in n—1 Elementen; Beispiel: a_1; oder
3) $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ werthig, wenn sie zugleich symmetrisch in (n—2) und den andern beiden Elementen ist; Beispiel: $a_1 + a_2$; oder
4) n(n—1) werthig, und dann ist sie: entweder
   symmetrisch in n—2 und unsymmetrisch in den übrigen 2 Elementen, z. B. $a_1 + ba_2$, oder
   symmetrisch in 2 und alternirend in den andern n—2 Elementen, z. B. $_1\Delta_{n-2}$; oder
5) $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ werthig, wenn sie symmetrisch in n—3 und zugleich in den übrigen 3 Elementen ist; Beispiel: $a_1 + a_2 + a_3$;

oder endlich die Funktion hat mehr als $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Werthe.

Für $n < 8$ ist die Grenze $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ durch die höhere n(n—1) zu ersetzen und der vierte Fall hinter den fünften zu stellen.

Ist $n = 3$, so ist die Funktion entweder ganz symmetrisch (Fall 1), oder 3werthig und dann in zwei Elementen symmetrisch (2 und 3).

Und eine Funktion von 2 Elementen, welche die einzige Transposition derselben zulässt, ist überhaupt symmetrisch.

Im Uebrigen ist der angeführte Satz streng richtig, sobald $n > 8$ ist. Dagegen giebt es

für $n = 4$: Funktionen von 3, also mehr als 1 und weniger als $n = 4$ Werthen; Beispiel: $a_1a_2 + a_3a_4$;

für $n = 5$: Funktionen von 15, also mehr als $\frac{n(n-1)}{2} = 10$ und weniger als $n(n-1) = 20$ Werthen; Beispiel wieder: $a_1a_2 + a_3a_4$;

für $n = 6$: Funktionen von 10, also mehr als $n = 6$ und weniger als $\frac{n(n-1)}{2} = 15$ Werthen; Beispiel: $a_1 a_2 a_3 + a_4 a_5 a_6$; ferner Funktionen von $\frac{n(n-1)}{2} = 15$ Werthen, welche den Bedingungen des dritten Falles, und endlich solche von $n(n-1) = 30$ Werthen, welche denen des vierten Falles nicht genügen; Beispiele die 15werthige Funktion $a_1 a_2 + a_3 a_4 + a_5 a_6$ und die 30werthige $(a_1 a_2 - a_3 a_4)(a_3 a_4 - a_5 a_6)(a_5 a_6 - a_1 a_2)$;

für $n = 8$: Funktionen von 35, also mehr als $\frac{n(n-1)}{2} = 28$ und weniger als $n(n-1) = 56$ Werthen; Beispiel: $a_1 a_2 a_3 a_4 + a_5 a_6 a_7 a_8$.

Dritter Abschnitt.

§ 23.

Mit Rücksicht auf Das, was vorher für Funktionen gefunden wurde, welche durch jede Transposition geändert werden, lässt sich nunmehr der allgemeinere Satz aussprechen:

Für alle n, welche grösser als 14 sind, ist eine Funktion von n Elementen entweder

1) einwerthig (symmetrisch); oder
2) zweiwerthig (alternirend); oder
3) n werthig, und dann ist sie symmetrisch in n—1 Elementen; oder
4) 2n werthig, und dann ist sie alternirend in n—1 Elementen; oder
5) $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ werthig, wenn sie zugleich symmetrisch in n—2 und den übrigen 2 Elementen ist; oder
6) n(n—1) werthig, und dann ist sie:
   entweder zugleich alternirend in n—2 und den übrigen 2 Elementen;
   oder symmetrisch in 2 Elementen und alternirend in den andern n—2;
   oder symmetrisch in n—2 Elementen und unsymmetrisch in den übrigen beiden; oder
7) 2n(n—1) werthig, wenn sie alternirend in n—2 und unsymmetrisch in den übrigen 2 Elementen ist; oder

8) $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ werthig, wenn sie zugleich symmetrisch in n—3 und den übrigen 3 Elementen ist;

oder endlich die Funktion hat mehr als $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ Werthe.

Für $n = 14$ ist $2n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, und für $n < 14$ übersteigt $2n(n-1)$ die Grenze $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, so dass der siebente Fall des Satzes auszulassen ist.

Mit dieser Einschränkung gilt der Satz schon für $n > 8$ ohne jede Ausnahme.

§ 24.

Zum Schluss mögen noch einige Bemerkungen Platz finden, welche sich auf die Bildung der Gruppe eines Funktionswerthes und auf den transitiven Charakter der Funktion beziehen.

Was zunächst die Gruppe eines Funktionswerthes betrifft, so ist dieselbe, wie früher schon erwähnt, in derjenigen der zugehörigen Zerlegung enthalten, da diese letztere durch keine Substitution geändert werden kann, welche den Funktionswerth ungeändert lässt. Unmittelbar bekannt als zur Gruppe gehörig sind alle Transpositionen des zugelassenen Komplexes und alle Produkte von je zwei Transpositionen irgend eines andern Komplexes der Zerlegung; natürlich sind auch alle Zusammensetzungen von beiderlei Substitutionen in der Gruppe enthalten. Die Gesammtheit dieser Zusammensetzungen ist selbst eine Gruppe, welche Theil der gesuchten ist und unter den Funktionen der gegebenen Zerlegung denjenigen zugehört, welche die grösste Werthezahl besitzen. Mit Benützung dieser Umstände und der bekannten Werthezahl der Funktion wird man gewöhnlich im Stande sein, die Gruppe vollständig herzustellen, zumal sich nach den angegebenen Regeln in den meisten Fällen Beispielsfunktionen bilden lassen.

Wie vielmal eine Funktion von n Elementen transitiv sei, lässt sich aus der zugehörigen Zerlegung in vielen Fällen einfach dadurch erkennen, dass man alle Transpositionen fortlässt, welche irgend h der n Elemente enthalten. Es bleibt dann eine Zerlegung von n—h Elementen. Gehört nun diese letztere zu Funktionen von mindestens eben so vielen Werthen wie die ursprüngliche Funktion, welche h Elemente man auch gestrichen haben möge, so nimmt die gegebene Funktion alle

ihre Werthe als solche von je n—h ihrer Elemente an und ist folglich mindestens h mal transitiv. Und sie ist auch nicht mehr als h mal transitiv, wenn der Zerlegung von n—h—1 Elementen, welche durch Streichung eines (h + 1) ten Elementes entsteht, keine Funktion der gegebenen Werthezahl mehr entspricht.

§ 25.

Beispielsweise sollen die gefundenen Ausnahmefunktionen auf ihren transitiven Charakter untersucht werden. Dabei ist die Bemerkung von Vortheil, dass eine v werthige Funktion von n Elementen höchstens n—p mal transitiv sein kann, wenn p die grösste Primzahl unter den Faktoren von v bezeichnet. Denn die Funktion kann als solche von p—1 ihrer Elemente nur einen Theiler von (p—1)! zur Werthezahl haben, also nicht v, da v den Faktor p hat, der in (p—1)! nicht aufgeht.

Danach ist zunächst die 35 werthige Ausnahmefunktion von 8 Elementen höchstens 8 — 7 = 1 mal transitiv. Sie ist aber auch wirklich einmal transitiv; denn streicht man in dem zugelassenen Komplexe [1234], [5678] alle Transpositionen eines beliebigen Elementes, etwa des Elementes 8, so wird der entstehende Komplex [1234], [567] durch eine Funktion von 7 Elementen zugelassen, welche in n—3 und 3 Elementen zugleich symmetrisch ist, also wieder $35 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Werthe besitzt (§ 23, Satz 8).

Die 30 werthige Funktion von 8 Elementen kann dreimal transitiv sein, da 5 der grösste Primfaktor in 30 und 8 — 5 = 3 ist. Unterdrückt man in der zugehörigen Zerlegung:

12 34 56 78	alle Transpositionen eines beliebigen Elementes, etwa des Elementes 8, so erhält man die Zerlegung der 30werthigen Funktion von 7 Elementen; aus dieser durch Streichung eines weiteren Elementes 7 die Zerlegung einer 30werthigen Ausnahmefunktion von 6 Elementen, nämlich 12 34 56 / 13 24 etc.;
13 24 57 68	
14 23 58 67	
15 26 37 48	
16 25 38 47	
17 28 35 46	
18 27 36 45	

daraus endlich durch Fortlassung eines dritten Elementes 6 eine Zerlegung von 5 Elementen:

12 34	die wieder zu Funktionen von mindestens 30 Werthen gehört, wie in § 14 dieses Theiles gezeigt worden ist. Die 30werthige Funktion von 8 Elementen ist somit in der That dreimal transitiv.
13 24	
14 23	
15	
etc.	

Und zugleich ergiebt sich, dass die 30 werthige Ausnahmefunktion von 6 Elementen, welche keine Transposition zulässt, einmal, und die 30 werthige von 7 Elementen zweimal transitiv ist.

Offenbar intransitiv ist die 42 werthige Ausnahmefunktion von 7 Elementen, da 42 durch 7 theilbar und $7 - 7 = 0$ ist.

Die 15 werthige Ausnahmefunktion von 6 Elementen, welche den Komplex 12, 34, 56 zulässt, kann $6 - 5 = 1$ mal transitiv sein und ist es in der That. Streicht man nämlich im zugelassenen Komplexe z. B. die Transposition des Elementes 6, so erhält man den zugelassenen Komplex der 15 werthigen Ausnahmefunktion von 5 Elementen. (§ 22.)

Diese letztere ist demnach intransitiv. ($5-5 = 0$.)

Einmal transitiv ist die 30werthige Funktion von 6 Elementen, welche den Komplex 12 34 56 zulässt, da $6-5 = 1$ ist, und die Funktion $(a_1 a_2 - a_3 a_4)(a_3 a_4 - a_5 a_6)(a_5 a_6 - a_1 a_2)$ alle ihre 30 Werthe als Funktion von irgend 5 ihrer Elemente annimmt.

Einmal transitiv ist ferner die 10 werthige Funktion von 6 Elementen. Denn es ist $6 - 5 = 1$, und dem Komplexe [123], [45], der durch Streichung z. B. von 6 aus dem zugelassenen Komplexe [123], [456] hervorgeht, entsprechen Funktionen von 5 Elementen, die in $n - 2 = 3$ und 2 Elementen zugleich symmetrisch sind, also ebenfalls 10 $(= \frac{n(n-1)}{2})$ Werthe besitzen (§ 23, Satz 5).

Auch die 20 werthige Ausnahmefunktion von 6 Elementen, welche durch alle Transpositionen eines Komplexes der Form [123], [456] den nämlichen andern Werth erhält, ist einmal transitiv. Denn der höchste Primzahlfaktor von 20 ist wieder 5, d. h. um 1 kleiner als 6, und aus [123], [456] entsteht durch Streichung eines Elementes 6 der Komplex [123], [45] einer Funktion von 5 Elementen, welche zugleich in n—2 und 2 Elementen alternirt, also ebenfalls 20 $(= n(n-1))$ werthig ist. (§ 23, Satz 6.)

Die 6 werthige Ausnahmefunktion von 6 Elementen könnte 3 mal transitiv sein, da 3 der grösste Primtheiler von 6 und $6 - 3 = 3$ ist. Lässt man in der zugehörigen Zerlegung:

12 34 56	welche auch die der 12werthigen Ausnahme-
13 45 26	funktion ist, alle Transpositionen fort, welche
24 35 16	ein beliebiges Element etwa 6, enthalten, so
25 14 36	bleibt die Zerlegung einer 6- oder 12werthigen
15 23 46	Funktion von 5 Elementen; die Streichung eines

zweiten Elementes 5 liefert eine Zerlegung von 4 Elementen:

12 34 | deren entsprechende Funktionen wieder 6- oder
13 | 12werthig sind; endlich erhält man durch Fort-
etc. | lassung eines dritten Elementes 4 die Zerlegung:
12 |
13 | einer 6werthigen Funktion von 3 Elementen.
23 |

Die 6werthige Ausnahmefunktion von 6 Elementen ist folglich genau dreimal, die 12werthige höchstens zweimal transitiv. Dass letztere auch wirklich zweimal transitiv ist, zeigt die Beispielsfunktion ${}_1\Delta_5(V)$, welche alle ihre Werthe als Funktion von irgend 4 ihrer Elemente annimmt.

Aus dem Vorhergehenden folgt zugleich, dass die 6werthige Ausnahmefunktion von vier Elementen einmal transitiv ist, und die 6werthige Funktion von 5 Elementen zweimal, während die 12werthige nur einmal transitiv ist.

Was endlich die dreiwerthige Funktion von 4 Elementen betrifft, welche den Komplex 12, 34 zulässt, so ist dieselbe einmal transitiv, da der höchste Primfactor von 4, nämlich 3, um 1 kleiner als 4 ist, und die Funktion als solche von 3 ihrer Elemente symmetrisch in zweien, also ebenfalls dreiwerthig ist.

Das Verfahren, welches den vorangehenden Untersuchungen zu Grunde liegt, kommt also, um dies noch einmal hervorzuheben, im Wesentlichen darauf hinaus, in der zugehörigen Zerlegung und ihren Komplexen gleichsam schematische Bilder der Function herzustellen und die Eigenschaften der letzteren an diesen Bildern zu untersuchen. In der That ist auch der Funktionsbegriff der Substitutionstheorie eigentlich ein rein schematischer, da für diese nur der Stellenunterschied, d. h. die Art und Weise in Betracht kommt, in der die Veränderlichen durch ihre Verbindung in der Funktion zueinander angeordnet sind.

Lebenslauf.

Ich, Alfred Bochert, bin geboren am 27. August 1852 zu Liebau in Schlesien und bin der älteste Sohn des Kanzleiraths Ernst Bochert, Büreauvorstehers an der kgl. Provinzial-Steuerdirection hierselbst. Ostern 1861 in die Sexta der Realschule am Zwinger zu Breslau aufgenommen, verliess ich diese Anstalt nach acht Jahren mit dem Zeugniss der Reife. Michaeli 1869 erfolgte meine ausserordentliche, Ende 1870 meine ordentliche Immatrikulation an hiesiger Universität, an der ich mich, mit mehrjähriger Unterbrechung durch Krankheit, hauptsächlich mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien widmete. Vorlesungen hörte ich bei den Herren *Bachmann*, *Ferd. Cohn*, *Dilthey*, *Dorn*, *Elvenich*, *Freymond*, *Galle*, *Grube*, *Körber*, *Marbach* (†), *Meyer*, *Roemer*, *Rosanes*, *Schroeter*. Den mathematisch-physikalischen Seminarien der Herren Professoren *Meyer* und *Schroeter* gehörte ich je zwei Semester an; in vier Semestern betheiligte ich mich an den von Herrn Professor *Rosanes* geleiteten mathematischen Uebungen. Ferner arbeitete ich ein Semester hindurch im physikalischen Kabinet unter Anleitung der Herren Professoren *Dorn* und *Meyer* und nahm, ebenfalls während eines Semesters, an dem mikroskopischen Kursus des Herrn Professor *Ferd. Cohn* Theil.

Allen genannten Herren fühle ich mich zu lebhaftem Danke verpflichtet, insbesondere Herrn Professor *Rosanes* für die vielfache Anregung und fördernde Theilnahme, deren ich mich seinerseits zu erfreuen hatte.

Thesen.

1. Das symbolische Verfahren der neueren Algebra liefert zwar mit Leichtigkeit kovariante Formen, lässt aber die Bedeutung und gegenseitige Beziehung derselben nicht klar genug hervortreten.
2. Zum Gebrauche des Imaginären in der Geometrie berechtigt nur der analytische Standpunkt.
3. Der geometrische Unterricht in den oberen Klassen unserer Gymnasien und Realschulen bedarf einer Umgestaltung; seinen Hauptgegenstand sollten die Elemente der analytischen Geometrie in wissenschaftlicher Behandlung bilden.